

Traitement Analogique du Signal

Electronique B1

Le filtrage analogique

Sylvain LARRIBE

CNAM Saclay 2005

Préambule.....	2
Introduction.....	3
Fonctions de transfert des filtres	4
Passe-bas	4
Passe-haut.....	6
Passe-bande (sélectif).....	7
Coupe-bande (rejecteur).....	7
Passe-tout (déphaseur)	8
Stabilité	8
Temps de groupe (ou temps de propagation) :	9
Gabarits des filtres	10
Centrage des gabarits	10
Normalisation.....	11
Transposition.....	11
Les Fonctions d'approximations	13
Bessel	13
Butterworth	14
Chebychev.....	15
Les Filtres passifs.....	16
Les composants passifs	16
Structure des passe-bas	16
Tableaux des coefficients.....	17
Transposition des impédances	17
Les Filtres actifs	18
L'amplificateur opérationnel	18
Intégrateurs.....	19
Filtre à contre réaction simple.....	21
Filtre à contre réaction multiple (MFB) : structure de Rauch.....	24
Filtre à source de tension contrôlée (VCVS) : structure de Sallen and Key	26
Filtre à variable d'état : filtres universels.....	29
Filtre Passe tout ou déphaseur.....	32
Autres fonctions actives	34
Inverseurs d'impédances (NIC).....	34
Amplificateurs non linéaires	35

Préambule

Ce document est un complément et non une alternative au cours de Traitement Analogique du Signal dispensé au CNAM de Saclay. Son utilisation n'est pas autorisée lors des partiels ou examens.

Introduction

Un filtre est un Système Linéaire Invariant dans le Temps permettant de diviser le spectre (espace fréquentiel) afin de conserver une ou plusieurs parties (bande) de ce spectre. Le filtre idéal permet de transmettre sans distorsion une partie du spectre (bande passante) et bloque toutes les autres parties (bande coupée), avec un passage abrupt (discontinuité) entre ces deux parties.

Les filtres sont caractérisés par leur **fonction de transfert**, et ils peuvent être classés en 5 familles, suivant la bande du spectre de fréquences sur laquelle ils agissent :

- passe-bas
- passe-bande
- passe-haut
- coupe-bande
- passe-tout

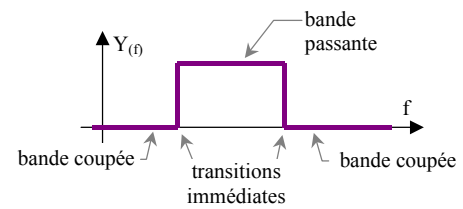


Figure 1 : exemple filtre passe-bande idéal

Le filtre idéal avec une discontinuité dans sa fonction de transfert n'est pas physiquement réalisable, car sa réponse impulsionnelle nécessiterait que l'évolution du signal de sortie anticipe l'évolution du signal appliqué en entrée (système non causal).

Les filtres analogiques réels présentent donc des imperfections avec lesquelles il faut trouver des compromis en fonction de son application :

- transition progressive entre la bande passante et la bande coupée
- irrégularité du gain dans la bande passante (ondulations)
- affaiblissement dans la bande coupée
- irrégularité du gain dans la bande coupée (ondulations)
- irrégularité du temps de propagation

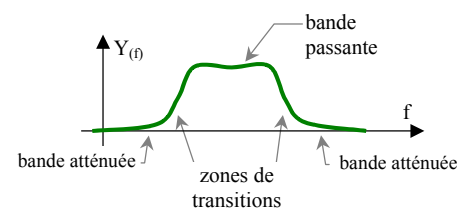


Figure 2 : exemple filtre passe-bande réel

Les compromis faits sur ces différentes imperfections peuvent être regroupés sur un graphique appelé **gabarit du filtre**.

Ce gabarit fixe les limites de la fonction de transfert du filtre réalisé.

Le gabarit étant défini pour chaque application, il en existe une infinité.

Afin de faciliter les calculs en vue de la réalisation des filtres, on peut moyennant un changement de variable (**transposition**) se ramener à un filtre passe-bas, puis par un second changement de variable (**normalisation**) se ramener à un gabarit dont la fréquence (pulsation) à la limite de la bande passante vaut 1 (sans unité).

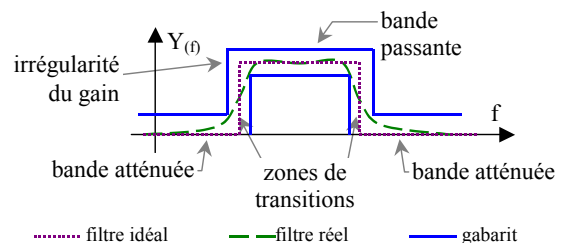


Figure 3 : exemple gabarit d'un filtre passe-bande

La fonction de transfert d'un filtre réel s'écrit sous la forme d'un rapport de polynômes complexes. Il existe de nombreuses fonctions mathématiques, appelées **fonctions d'approximations**, pouvant répondre à l'exigence du gabarit normalisé. Les principales fonctions d'approximations sont les suivantes :

- fonction de Bessel
- fonction de Chebychev et Chebychev inverse
- fonction de Butterworth
- fonction de Cauer

La réalisation des filtres peut être faite à base de résistances, condensateurs et inductances, on parle alors de **filtres passifs**, en opposition avec les **filtres actifs** qui comportent en plus des composants actifs, comme par exemple les transistors ou amplificateurs opérationnels (ampli op ou aop), qui nécessitent une source d'énergie externe (alimentation).

Fonctions de transfert des filtres

La fonction de transfert d'un filtre s'écrit avec les notations complexe ($j\omega$) ou de Laplace (P), comme le rapport de deux polynômes (Équation 1) :

$$H_{(P)} = \frac{N_{(P)}}{D_{(P)}} = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3 + a_4 p^4 + \dots + a_\alpha p^\alpha}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + b_3 p^3 + b_4 p^4 + \dots + b_\beta p^\beta} \quad \text{Équation 1}$$

- Pour tout système réel, le degré du dénominateur (β) doit être supérieur ou égal au degré du numérateur (α) : $\beta \geq \alpha$.
- Pour qu'un filtre soit stable, il faut que tous les pôles de la fonction de transfert soient à parties réelles négatives.
- L'ordre d'un filtre est donné par le degré du polynôme du dénominateur (β) de la fonction de transfert.
- Toutes les fonctions de transfert peuvent être décomposées comme le produit de fonctions de transfert du premier et du deuxième ordre.

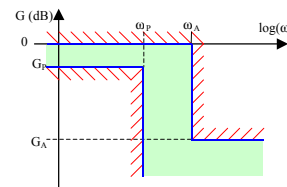
Les cinq types de fonctions de transfert (passe-bas, passe-haut, passe-bande, coupe-bande et passe-tout) sont présentés ci-dessous avec leurs principaux paramètres.

Passe-bas

représentation symbolique



le gabarit



	réponse impulsionnelle	réponse harmonique (fonction de transfert)
filtre idéal	$h_{(t)} = 2k \cdot f_c \cdot \frac{\sin(2\pi f_c(t-t_0))}{2\pi f_c(t-t_0)}$	$H_{(jf)} = k \cdot e^{-j2\pi f t_0} \quad \text{pour } f < f_c$ $H_{(jf)} = 0 \quad \text{pour } f > f_c$ module phase t_0 est le temps de propagation, (retard)
1 ^{er} ordre	$h_{(t)} = \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{1}{\omega_0}$ exemple tracé avec : $\tau = 1$	module : $H_{(j\omega)} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$ $ H_{(j\omega)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$ phase : $\theta_{(H_{(j\omega)})} = -\arctan \frac{\omega}{\omega_0}$ exemple tracé avec : $\omega_0 = 1$

- ω_0 est pulsation caractéristique. Pour un filtre du premier ordre, elle correspond à la pulsation pour laquelle le gain a diminué de 3 dB ($\omega_0 = \omega_{(G_{\max} - 3\text{dB})}$). Cela correspond également à la pulsation pour laquelle la rotation de la phase est de $\pm 45^\circ$ (déphasage égale à 50 % du déphasage totale).
- Le gain dans la bande passante est fixé arbitrairement à 0 dB soit $k = 1$.
- Temps de propagation : voir le chapitre **Temps de groupe** (ou temps de propagation) :

$$m = 0 : h_{(t)} = \omega_0 \sin(\omega_0 t) \quad (\text{système oscillant})$$

$$m < 1 : h_{(t)} = \frac{\omega_0 \cdot e^{-m\omega_0 t}}{\sqrt{1-m^2}} \sin(\omega_0 t \sqrt{1-m^2})$$

$$m = 1 : h_{(t)} = \omega_0^2 t \cdot e^{-\omega_0 t}$$

$$m > 1 : h_{(t)} = \frac{\omega_0 \cdot e^{-m\omega_0 t}}{\sqrt{m^2-1}} \sinh(\omega_0 t \sqrt{m^2-1})$$

Pour t donné, il y a continuité de $h_{(t)}$ en fonction de m .
exemple Figure 4

$$H_{(j\omega)} = \frac{1}{1 + 2m \cdot j \frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad \text{exemple Figure 5}$$

$$\text{module : } |H_{(j\omega)}| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2m \cdot \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$\text{phase : } \theta_{(H_{(j\omega)})} = -\arctan \frac{2m \cdot \omega \cdot \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

2^{ième} ordre

- ω_0 est pulsation caractéristique. Suivant la définition retenue, elle peut correspondre, à la pulsation pour laquelle le gain a diminué de 3 dB ($\omega_0 = \omega_{(G_{\max} - 3\text{dB})}$), à la pulsation ω_p donnée par le gabarit, à la pulsation correspondant à un déphasage égal à 50 % du déphasage total ($\theta = \pm 90^\circ$ pour un filtre du 2^{ième} ordre)...
- m est le coefficient d'amortissement. Il caractérise la fonction de transfert autour du point ω_0 (passage de la bande passante à la bande atténuée : Figure 5). Plus m est grand, et plus l'amortissement est important, ce qui se traduit par un passage très progressif de la bande passante à la bande atténuée. Lorsque $m \geq 1$, la fonction de transfert est décomposable en deux fonctions du premier ordre. Pour les valeurs faibles ($m < 0,707$), il y a une résonance de la fonction de transfert. Dans ce cas, on parle plus volontiers de facteur de qualité que de coefficient d'amortissement. Le facteur de qualité est noté Q et il est défini par : $Q = \frac{1}{2m}$
- Temps de propagation : voir le chapitre **Temps de groupe** (ou temps de propagation) :

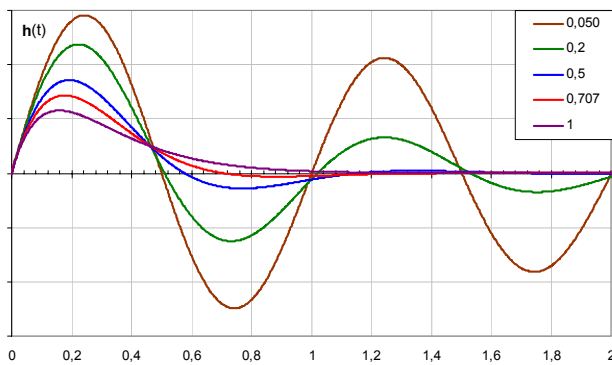


Figure 4 : réponse impulsionnelle en fonction de m

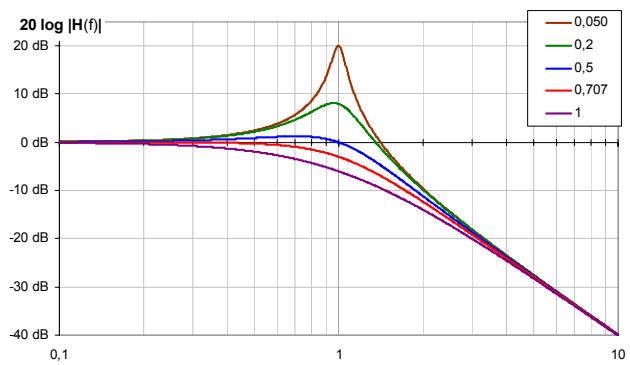


Figure 5 : réponse harmonique en fonction de m

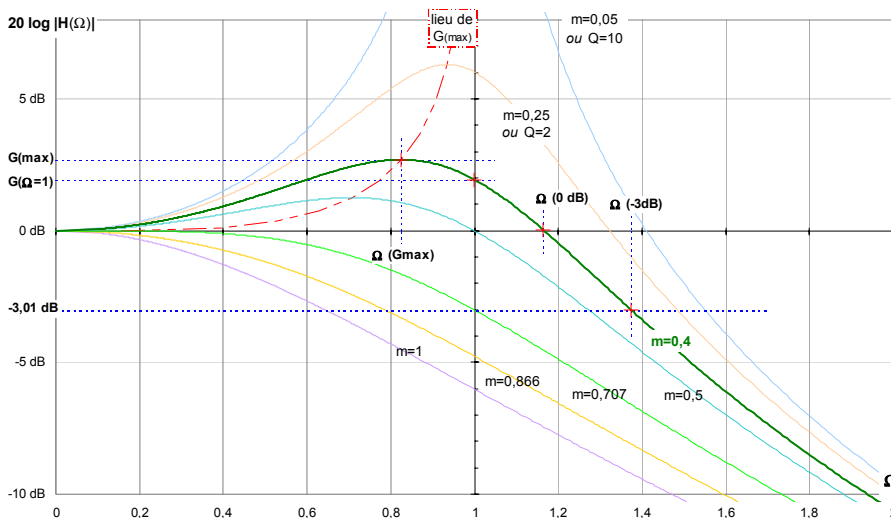


Figure 6 : valeurs caractéristiques de G et Ω en fonction de m .

Quelques valeurs caractéristiques du gain G et de la pulsation Ω en fonction de m .

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$G_{(\omega=1)} = -20 \log(2m)$$

$$G_{(\max)} = -20 \log(2m \sqrt{1-m^2})$$

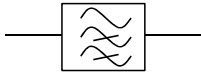
$$\Omega_{(G_{\max})} = \sqrt{1-2m^2}$$

$$\Omega_{(0\text{dB})} = \sqrt{2-4m^2}$$

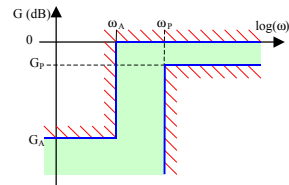
$$\Omega_{(-3\text{dB})} = \sqrt{1-2m^2 + \sqrt{1+(1-2m^2)^2}}$$

Passe-haut

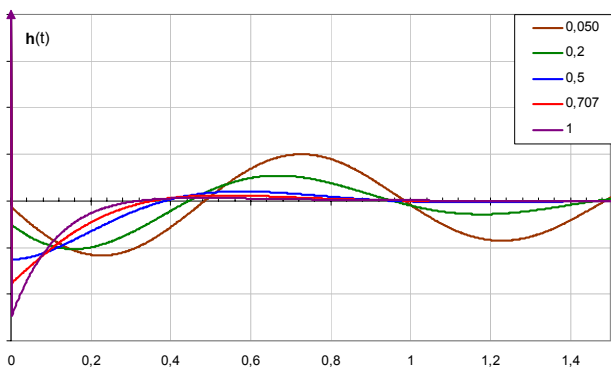
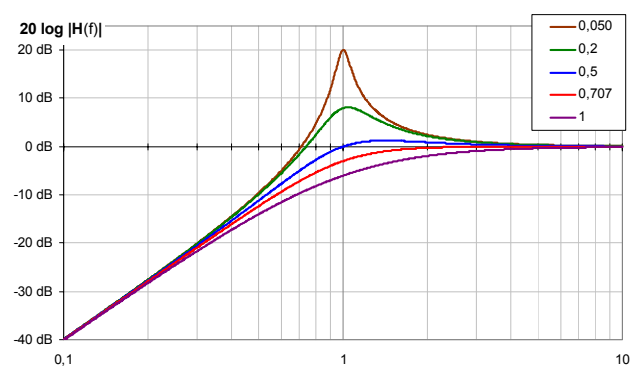
représentation symbolique



le gabarit

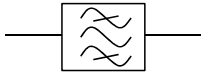


	réponse impulsionnelle	réponse harmonique (fonction de transfert)
filtre idéal	$h_{(t)} = k \left(\delta_{(t-t_0)} - 2f_c \cdot \frac{\sin(2\pi f_c(t-t_0))}{2\pi f_c(t-t_0)} \right)$	$H_{(jf)} = 0 \quad \text{pour } f < f_c$ $H_{(jf)} = k \cdot e^{-j2\pi f t_0} \quad \text{pour } f > f_c$ module phase
1 ^{er} ordre	$h_{(t)} = \delta_{(t)} - \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{avec } \tau = \frac{1}{\omega_0}$ exemple tracé avec : $\tau = 1$	$H_{(j\omega)} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$ exemple tracé avec : $\omega_0 = 1$
2 ^{ième} ordre	Un exemple pour différentes valeurs de m est donné par la Figure 7 $m = 0$: $h_{(t)} = \delta_{(t)} - \omega_0 \sin(\omega_0 t)$ $m < 1$: $h_{(t)} = \delta_{(t)} - \frac{\omega_0 \cdot e^{-m\omega_0 t}}{\sqrt{1-m^2}} \left((1-2m^2) \cdot \sin(\omega_0 t \sqrt{1-m^2}) + (2m\sqrt{1-m^2}) \cdot \cos(\omega_0 t \sqrt{1-m^2}) \right)$ $m = 1$: $h_{(t)} = \delta_{(t)} - \omega_0 e^{-\omega_0 t} (2 - \omega_0 t)$ $m > 1$: $h_{(t)} = \delta_{(t)} - \frac{\omega_0 \cdot e^{-m\omega_0 t}}{\sqrt{m^2-1}} \left((1-2m^2) \cdot \sinh(\omega_0 t \sqrt{m^2-1}) + (2m\sqrt{m^2-1}) \cdot \cosh(\omega_0 t \sqrt{m^2-1}) \right)$	$H_{(j\omega)} = \frac{-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + 2m \cdot j\frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad \text{exemple Figure 8}$

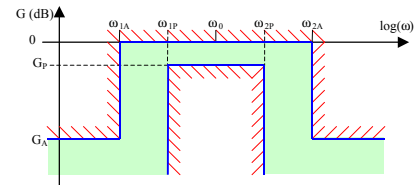
Figure 7 : réponse impulsionnelle en fonction de m Figure 8 : réponse harmonique en fonction de m

Passe-bande (sélectif)

représentation symbolique



le gabarit



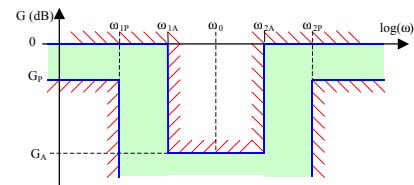
	réponse impulsionnelle	réponse harmonique (fonction de transfert)
filtre idéal	$\Delta = \frac{f_{C2} - f_{C1}}{2} \quad \text{et} \quad f_C = \frac{f_{C2} + f_{C1}}{2}$ $h_{(t)} = 2k \cdot \Delta \cdot \frac{\sin(2\pi\Delta(t-t_0))}{2\pi\Delta(t-t_0)} \cdot \cos(2\pi f_C(t-t_0))$	$H_{(jf)} = 0 \quad \text{pour } f \notin [f_{C1}; f_{C2}]$ $H_{(jf)} = k \cdot e^{-j2\pi f t_0} \quad \text{pour } f \in [f_{C1}; f_{C2}]$ module phase
1 ^{er} ordre	Un filtre passe-bande est toujours d'ordre pair	
2 ^{ième} ordre	$m = 0 : h_{(t)} = \omega_0 \cos(\omega_0 t)$ $m < 1 : h_{(t)} = \omega_0 \cdot e^{-m\omega_0 t} \left(\cos(\omega_0 t \sqrt{1-m^2}) - \frac{m}{\sqrt{1-m^2}} \cdot \sin(\omega_0 t \sqrt{1-m^2}) \right)$ $m = 1 : h_{(t)} = \omega_0 e^{-\omega_0 t} (1 - \omega_0 t)$ $m > 1 : h_{(t)} = \omega_0 \cdot e^{-m\omega_0 t} \left(\cosh(\omega_0 t \sqrt{m^2-1}) - \frac{m}{\sqrt{m^2-1}} \cdot \sinh(\omega_0 t \sqrt{m^2-1}) \right)$	$H_{(j\omega)} = \frac{2m \cdot j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + 2m \cdot j \frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}$

Coupe-bande (rejeteur)

représentation symbolique



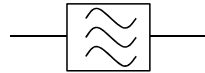
le gabarit



	réponse impulsionnelle	réponse harmonique (fonction de transfert)
filtre idéal	$\Delta = \frac{f_{C2} - f_{C1}}{2} \quad \text{et} \quad f_C = \frac{f_{C2} + f_{C1}}{2}$ $h_{(t)} = k \left(\delta_{(t-t_0)} - 2\Delta \frac{\sin(2\pi\Delta(t-t_0))}{2\pi\Delta(t-t_0)} \cos(2\pi f_C(t-t_0)) \right)$	$H_{(jf)} = k \cdot e^{-j2\pi f t_0} \quad \text{pour } f \notin [f_{C1}; f_{C2}]$ $H_{(jf)} = 0 \quad \text{pour } f \in [f_{C1}; f_{C2}]$ module phase
1 ^{er} ordre	Un filtre coupe-bande est toujours d'ordre pair	
2 ^{ième} ordre		$H_{(j\omega)} = \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}{1 + 2m \cdot j \frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}$

Passe-tout (déphaseur)

représentation symbolique



	réponse impulsionnelle	réponse harmonique (fonction de transfert)
	$h(t) = k \cdot \delta_{(t-t_0)}$	$H_{(j\omega)} = k \cdot e^{-j2\pi f t_0}$ pour $f \in]-\infty; +\infty[$
filtre idéal		module phase
1 ^{er} ordre		$H_{(j\omega)} = \frac{1 - j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$
2 ^{ième} ordre		$H_{(j\omega)} = \frac{1 - 2m \cdot j \frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + 2m \cdot j \frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$

Stabilité

Un système est stable si après la fin d'une perturbation appliquée en entrée, la sortie retrouve sa position d'équilibre initiale ($h(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$).

Il existe différentes façons de vérifier la stabilité d'un système. Si l'on connaît $h(t)$, il faut s'assurer qu'elle tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini. A partir de la fonction de transfert, il faut que tous ses pôles soient à parties réelles négatives. Les pôles de $H_{(P)}$ sont les valeurs de P qui permettent d'annuler le dénominateur de $H_{(P)}$.

Le critère de Routh Hurwitz permet de vérifier la stabilité d'un système dont on connaît la fonction de transfert $H_{(P)}$, sans avoir à calculer ses pôles.

La Figure 9 résume les six cas possibles du comportement de la réponse impulsionnelle en fonction de la position des pôles dans le plan complexe.

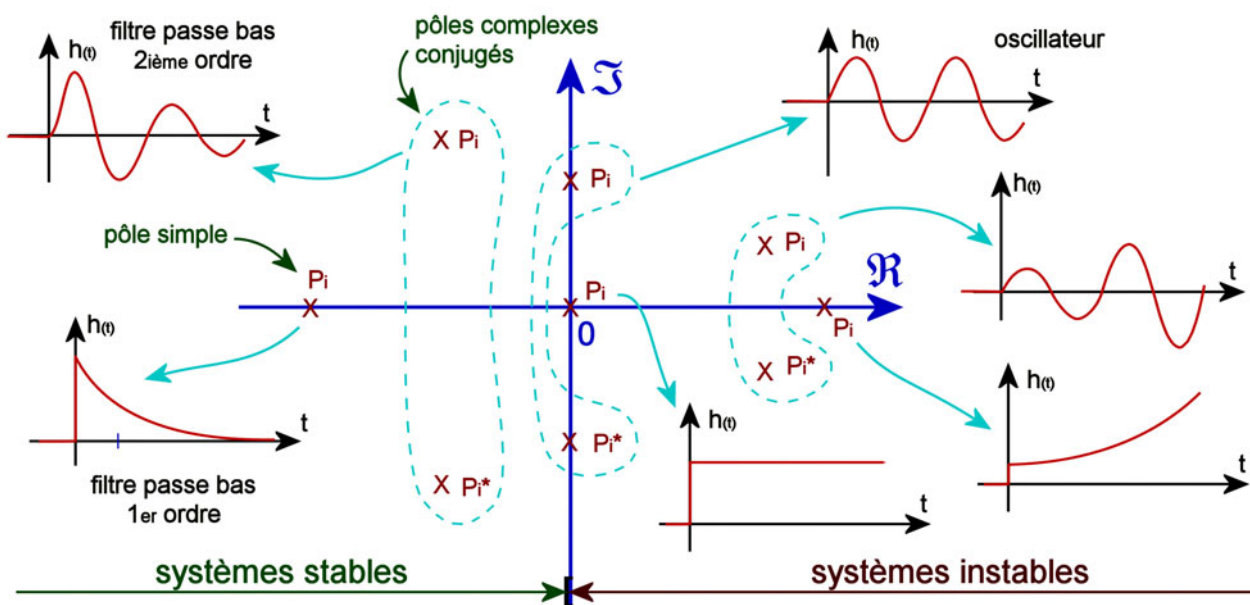


Figure 9 : pôles dans le plan complexe et stabilité

Temps de groupe (ou temps de propagation) :

Le temps de groupe (t_{gr}) est défini comme la dérivée de la phase par rapport à la pulsation.

$$t_{gr(\omega)} = \frac{-d\theta}{d\omega}$$

Il en découle qu'une phase linéaire donne un temps de groupe constant. Un temps de groupe constant (indépendant de la fréquence) signifie que toutes les composantes spectrales d'un signal sont transmises avec le même décalage temporel. L'intégrité de la forme du signal est ainsi respectée sauf pour les composantes spectrales que l'on désire supprimer par filtrage des amplitudes.

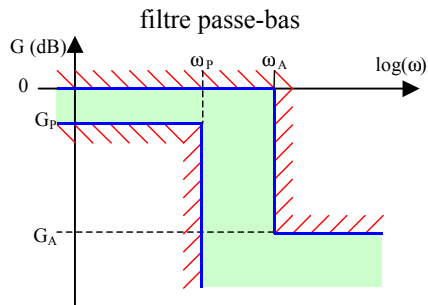
Dans le cas d'un filtre de Bessel, le temps de groupe correspond au temps nécessaire pour atteindre 50 % de la réponse indicielle.

passe-bas du premier ordre	passe-bas du deuxième ordre
fonction de transfert : $H_{(j\omega)} = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$	fonction de transfert : $H_{(j\omega)} = \frac{1}{1 + 2m \cdot j \frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$
la phase est donnée par : $\theta_{(H_{(j\omega)})} = -\arctan \frac{\omega}{\omega_0}$	la phase est donnée par : $\theta_{(H_{(j\omega)})} = -\arctan \frac{2m \cdot \omega \cdot \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$
$\frac{d\theta_{(\omega)}}{d\omega} = -\frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \omega^2}$ soit $t_{gr(\omega)} = +\frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \omega^2}$	$t_{gr(\omega)} = +\frac{2m \cdot \omega_0 (\omega_0^2 + \omega^2)}{\omega_0^4 + 2(2m^2 - 1)\omega_0^2 \omega^2 + \omega^4}$
lorsque ω tend vers 0, le temps de groupe tend vers $t_{gr(0)} = +\frac{1}{\omega_0}$	lorsque ω tend vers 0, le temps de groupe tend vers $t_{gr(0)} = +\frac{2m}{\omega_0}$

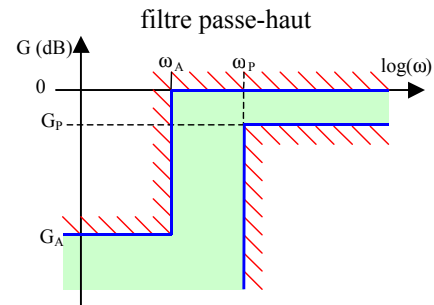
Gabarits des filtres

Les indices P et A sont associés respectivement aux grandeurs définissant les limites de la bande passante et la bande atténuée (ou arrêt ou coupée).

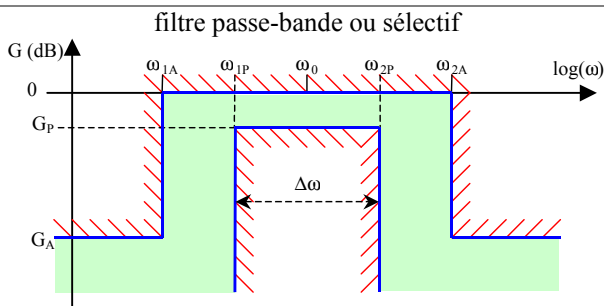
L'axe des abscisses peut être gradué en fréquences (f) ou en pulsations ($\omega = 2\pi f$).



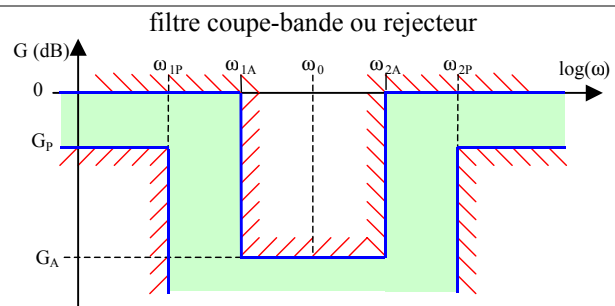
bande passante : $\omega_P - 0 = \omega_P$
 bande de transition : $\omega_A - \omega_P$
 bande atténuée : $+\infty - \omega_A$ (sa valeur est infinie)
 sélectivité : $S = \frac{\omega_P}{\omega_A}$



bande passante : $+\infty - \omega_P$ (sa valeur est infinie)
 bande de transition : $\omega_P - \omega_A$
 bande atténuée : $\omega_A - 0 = \omega_A$
 sélectivité : $S = \frac{\omega_A}{\omega_P}$



bande passante : $\omega_{2P} - \omega_{1P} = \Delta\omega$
 bandes de transitions : $\omega_{2A} - \omega_{2P}$ et $\omega_{1P} - \omega_{1A}$
 bandes atténuées : $+\infty - \omega_{2A}$ et $\omega_{1A} - 0 = \omega_{1A}$
 pulsation centrale : $\omega_0 = \sqrt{\omega_{2P} \cdot \omega_{1P}}$
 sélectivité : $S = \frac{\omega_{2P} - \omega_{1P}}{\omega_{2A} - \omega_{1A}}$



bandes passantes : $+\infty - \omega_{2P}$ et $\omega_{1P} - 0 = \omega_{1P}$
 bandes de transitions : $\omega_{2P} - \omega_{2A}$ et $\omega_{1A} - \omega_{1P}$
 bande atténuée : $\omega_{2A} - \omega_{1A}$
 pulsation centrale : $\omega_0 = \sqrt{\omega_{2P} \cdot \omega_{1P}}$
 sélectivité : $S = \frac{\omega_{2A} - \omega_{1A}}{\omega_{2P} - \omega_{1P}}$

La bande de transition est comme son nom l'indique, la bande située entre la bande passante et la bande atténuée. Plus elle est étroite, et plus le filtre se rapproche du filtre idéal (sélectivité = 1), mais plus l'ordre du filtre sera élevé.

Pour les filtres passe-bande et coupe-bande, la pulsation centrale est définie comme la moyenne géométrique des pulsations de limite de bande passante (ω_{1P} et ω_{2P}).

Centrage des gabarits

Les filtres passe-bande et coupe-bande doivent être centrés avant toute normalisation ou transposition.

Un gabarit est centré lorsque les pulsations centrales $\omega_{0P} = \sqrt{\omega_{2P} \cdot \omega_{1P}}$ et $\omega_{0A} = \sqrt{\omega_{2A} \cdot \omega_{1A}}$ sont égales.

Dans le cas contraire, il faut centrer le gabarit, en modifiant une ou plusieurs pulsations. Ces modifications vont obligatoirement dans le sens de rendre le gabarit plus contraignant, donc de diminuer la bande de transition la plus large.

Une solution intéressante consiste à réduire la bande de transition la plus large, de façon symétrique, en modifiant les deux pulsations.

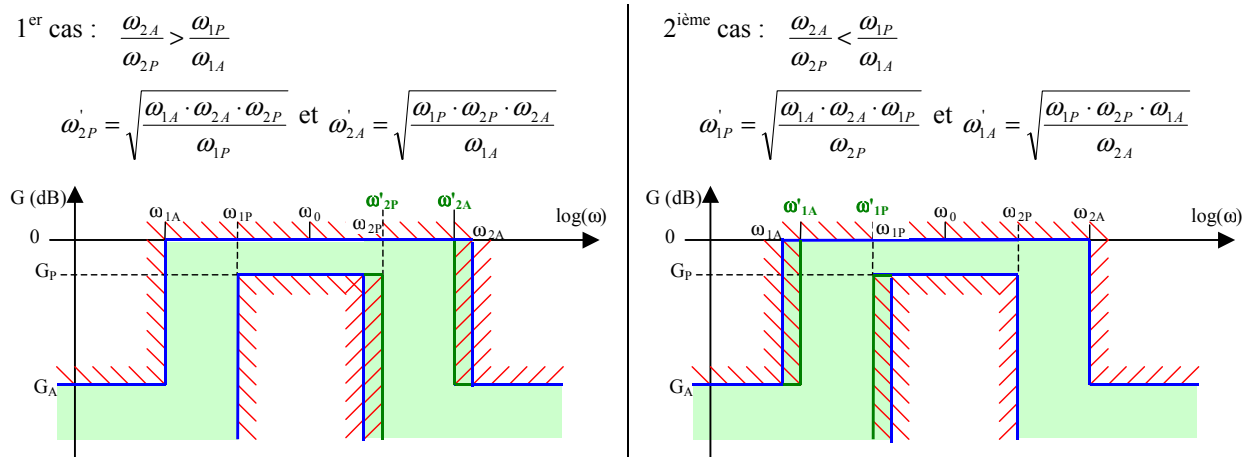


Tableau 1 : exemple de centrage de gabarit

Normalisation

La normalisation doit être faite en abscisse et en ordonnée, il s'agit d'un changement de variable. En abscisse, elle permet de translater le gabarit afin de ramener la pulsation (ou fréquence) de coupure ou centrale pour les filtres passe et coupe-bande sur $\Omega = 1$.

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (\text{grandeur sans unité}).$$

En ordonnée, elle permet de se ramener à un gain de 0 dB dans la bande passante (valeur maximale). Il s'agit simplement d'ajouter un gain positif (amplification) ou négatif (atténuation).

En fin de synthèse, lors de la réalisation du schéma électrique du filtre et le choix des composants, il ne faut pas oublier de dénormaliser, sans quoi la fréquence de coupure se situerait aux environs de 0,16 Hz ($\sim 1/2\pi$).

La dénormalisation revient à faire l'opération inverse : $\omega = \Omega \cdot \omega_0$, en faisant bien attention à la valeur de Ω , qui pourra être différente de 1. Par exemple dans le cas d'un filtre de Butterworth une seconde normalisation peut avoir lieu.

Transposition

La transposition est un changement de variable (Tableau 2) qui permet de convertir un gabarit (ou une fonction de transfert) en un nouveau gabarit (ou fonction de transfert) d'un filtre de type passe-bas.

Ce changement est nécessaire pour la synthèse des filtres, car seuls les filtres passe-bas normalisés sont tabulés.

De même que pour la normalisation, en fin de synthèse, il faut faire la transposition inverse, pour obtenir le filtre attendu, sans quoi le filtre serait un passe-bas.

notation	passe-bas	passe-haut	passe-bande	coupe-bande
Laplace	$\frac{p}{\omega_0} \Leftarrow$	$\Rightarrow \frac{\omega_0}{p}$	$\Rightarrow \frac{1}{2m} \left(\frac{p}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{p} \right)$	$\Rightarrow \frac{2m}{\left(\frac{p}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{p} \right)}$
Laplace normalisé $s = \frac{p}{\omega_0}$	$s \Leftarrow$	$\Rightarrow \frac{1}{s}$	$\Rightarrow \frac{1}{2m} \left(s + \frac{1}{s} \right)$	$\Rightarrow \frac{2m}{\left(s + \frac{1}{s} \right)} = \frac{2m \cdot s}{s^2 + 1}$
complexe	$\frac{j\omega}{\omega_0} \Leftarrow$	$\Rightarrow \frac{\omega_0}{j\omega}$	$\Rightarrow \frac{1}{2m} \left(\frac{j\omega}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{j\omega} \right)$	$\Rightarrow -2m \cdot j \left(\frac{\omega \cdot \omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \right)$
complexe normalisé $j\Omega = \frac{j\omega}{\omega_0}$	$j\Omega \Leftarrow$	$\Rightarrow \frac{1}{j\Omega}$	$\Rightarrow \frac{j}{2m} \left(\frac{\Omega^2 - 1}{\Omega} \right)$	$\Rightarrow -j \frac{2m\Omega}{\Omega^2 - 1}$

Tableau 2 : changement de variable pour la transposition vers ou depuis un filtre passe-bas

Les Fonctions d'approximations

Une fonction d'approximation recherche à approcher le gabarit en ayant le degré le plus faible. Ce document traite pour le moment des fonctions d'approximations de Bessel, Butterworth et Chebychev.

Bessel

Les filtres de Bessel ou Thomson-Bessel sont des filtres polynomiaux pour lesquels le critère d'optimisation est la régularité du temps de propagation ou temps de groupe (t_{gr}) dans la bande passante, raison pour laquelle ils sont aussi appelés filtres à phase linéaire. En contre partie, le passage de la bande passante à la bande atténuée se fait très progressivement (la bande de transition est importante).

La fonction de transfert est déterminée de façon que les n premières dérivées de t_{gr} soient nulles pour $\omega = 0$.

Il n'existe pas de méthode analytique pour déterminer l'ordre d'un polynôme de Bessel répondant aux paramètres d'un gabarit. Il faut le déterminer par approximations successives, faire appel aux solveurs numériques, ou peut être plus simplement avec une représentation graphique dans un tableur ou avec un logiciel de simulation électronique.

Les polynômes de Bessel sont donnés dans le Tableau 3 pour les premiers ordres.

n	polynômes de Bessel
1	$D_1 = P + 1$
2	$D_2 = P^2 + 3P + 1$
3	$D_3 = P^3 + 6P^2 + 15P + 15$
4	$D_4 = P^4 + 10P^3 + 45P^2 + 105P + 105$
5	$D_5 = P^5 + 15P^4 + 105P^3 + 420P^2 + 945P + 945$
6	$D_6 = P^6 + 21P^5 + 210P^4 + 1260P^3 + 4725P^2 + 10395P + 10395$
7	$D_7 = P^7 + 28P^6 + 378P^5 + 3150P^4 + 17325P^3 + 62370P^2 + 135135P + 135135$
...	...

Tableau 3 : polynômes de Bessel

Les polynômes de Bessel se calculent avec la formule de récurrence : $D_n = (2n-1)D_{n-1} + P^2 D_{n-2}$. Ces polynômes ne sont pas utilisés tels quels comme dénominateurs des fonctions de transfert des filtres passe-bas, car le gain statique est différent de 0 dB ($H_{(P)} \xrightarrow{P \rightarrow 0} \neq 1$) et il dépend de l'ordre du polynôme. Ils ont donc été normalisés (Tableau 4) en gain ($H_{(P)} \xrightarrow{P \rightarrow 0} = 1$) et en pulsation

$$20 \log |H_{(P)}|_{(P=1)} = -3 \text{ dB}.$$

n	polynômes de Bessel normalisés en gain et en pulsation
2	$D_2 = 0,618P^2 + 1,361P + 1$
3	$D_3 = 0,3607P^3 + 1,2328P^2 + 1,7556P + 1$
4	$D_4 = 0,1901P^4 + 0,8995P^3 + 1,9149P^2 + 2,1138P + 1$
5	$D_5 = 0,08911P^5 + 0,5506P^4 + 1,588P^3 + 2,6174P^2 + 2,4266P + 1$
6	$D_6 = 0,03754P^6 + 0,2916P^5 + 1,0788P^4 + 2,3944P^3 + 3,3216P^2 + 2,7033P + 1$

Tableau 4 : polynômes de Bessel normalisés

Pour l'utilisation de ces polynômes dans les filtres actifs, constitués par la mise en série de cellules du premier et deuxième ordre, ils sont aussi proposés sous la forme quadratique.

n	polynômes de Bessel normalisés en gain et en pulsation
2	$D_2 = 0,618P^2 + 1,361P + 1$
3	$D_3 = (0,756P + 1)(0,4771P^2 + 0,9996P + 1)$
4	$D_4 = (0,4883P^2 + 1,3389P + 1)(0,3885P^2 + 0,7738P + 1)$
5	$D_5 = (0,665P + 1)(0,4128P^2 + 1,1401P + 1)(0,3245P^2 + 0,621P + 1)$
6	$D_6 = (0,3891P^2 + 1,2224P + 1)(0,3509P^2 + 0,9691P + 1)(0,2759P^2 + 0,5133P + 1)$
7	$D_7 = (0,594P + 1)(0,3396P^2 + 1,0946P + 1)(0,3012P^2 + 0,8305P + 1)(0,2382P^2 + 0,4333P + 1)$
8	$D_8 = (0,3166P^2 + 1,112P + 1)(0,2984P^2 + 0,976P + 1)(0,2625P^2 + 0,721P + 1)(0,209P^2 + 0,373P + 1)$

Tableau 5 : forme quadratique des polynômes de Bessel normalisés

Butterworth

Les filtres de Butterworth (Maximally Flat) présentent le gain le plus constant possible dans la bande passante. Le carré du module de cette réponse fréquentielle est décrit par :

$$|H_{(j\Omega)}|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \cdot \Omega^{2n}}$$

ε : amplitude de l'ondulation dans la bande passante.

Ω : pulsation normalisée.

n : ordre du filtre.

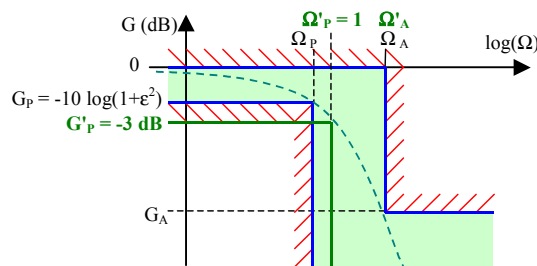
A partir des paramètres fournis par le gabarit, on peut calculer ε et n .

$$\varepsilon^2 = 10^{\frac{-G_p}{10}} - 1$$

$$n \geq \frac{\ln\left(10^{\frac{-G_A}{10}} - 1\right) - \ln\left(10^{\frac{-G_p}{10}} - 1\right)}{2 \cdot \ln \Omega_A}$$

l'ordre du filtre est le premier entier supérieur.

Les tables des polynômes de Butterworth (Tableau 6) sont données, pour $20 \log |H_{(\Omega)}|_{(\Omega=1)} = -3 \text{ dB}$, ce qui correspond à $\varepsilon = 1$. Si le gabarit normalisé et transposé du filtre à réaliser n'a pas $G_p = -3 \text{ dB}$ (ce qui est le cas le plus fréquent), il faut calculer un nouveau gabarit (Figure 10) avec G'_p , Ω'_p et Ω'_A .



$$G_p = -3 \text{ dB}$$

$$\Omega'_p = \sqrt[n]{\varepsilon} \cdot \Omega_p$$

$$\Omega'_A = \sqrt[n]{\varepsilon} \cdot \Omega_A$$

et il ne faudra pas oublier de dénormaliser, en prenant

$$\text{non pas } \Omega = 1 \text{ mais } \Omega = \frac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}}$$

Figure 10 : gabarit passe-bas normalisé pour Butterworth

n	polynômes de Butterworth normalisés pour $\varepsilon = 1$
2	$D_2 = P^2 + \sqrt{2}P + 1$
3	$D_3 = (P+1)(P^2 + P + 1)$
4	$D_4 = \left(P^2 - 2P \cos \frac{5\pi}{8} + 1\right) \left(P^2 - 2P \cos \frac{7\pi}{8} + 1\right)$
5	$D_5 = (P+1) \left(P^2 - 2P \cos \frac{3\pi}{5} + 1\right) \left(P^2 - 2P \cos \frac{4\pi}{5} + 1\right)$
6	$D_6 = \left(P^2 - 2P \cos \frac{7\pi}{12} + 1\right) \left(P^2 - 2P \cos \frac{3\pi}{4} + 1\right) \left(P^2 - 2P \cos \frac{11\pi}{12} + 1\right)$
7	$D_7 = (P+1) \left(P^2 - 2P \cos \frac{4\pi}{7} + 1\right) \left(P^2 - 2P \cos \frac{5\pi}{7} + 1\right) \left(P^2 - 2P \cos \frac{6\pi}{7} + 1\right)$
8	$D_8 = \left(P^2 - 2P \cos \frac{9\pi}{16} + 1\right) \left(P^2 - 2P \cos \frac{11\pi}{16} + 1\right) \left(P^2 - 2P \cos \frac{13\pi}{16} + 1\right) \left(P^2 - 2P \cos \frac{15\pi}{16} + 1\right)$

Tableau 6 : forme quadratique des polynômes de Butterworth

Chebyshev

Contrairement à l'approximation de Butterworth, l'approximation de Chebyshev présente de l'ondulation dans la bande passante. Ceci permet d'avoir un passage plus rapide entre la bande passante et la bande atténuée, pour un filtre du même ordre. Le carré du module de cette réponse fréquentielle est décrit par :

$$|H_{(j\Omega)}|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \cdot T_{n(\Omega)}^2}$$

ε : amplitude de l'ondulation dans la bande passante.

Ω : pulsation normalisée.

$T_{n(\Omega)}^2$: carré du polynôme de Chebyshev.

n : ordre du filtre.

Le polynôme de Chebyshev est défini par

pour $\Omega \leq 1$

$$T_{n(\Omega)} = \cos(n \cdot \arccos(\Omega))$$

pour $\Omega \geq 1$

$$T_{n(\Omega)} = \cosh(n \cdot \operatorname{arccosh}(\Omega))$$

$$T_0 = 1$$

$$T_1 = \Omega$$

$$T_2 = 2\Omega^2 - 1$$

$$T_3 = 4\Omega^3 - 3\Omega$$

$$T_4 = 8\Omega^4 + 8\Omega^2 + 1$$

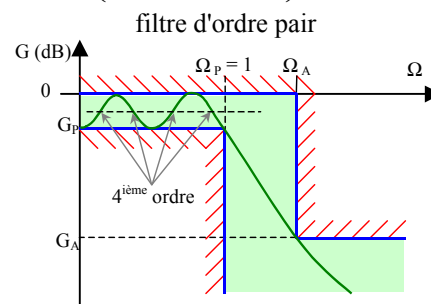
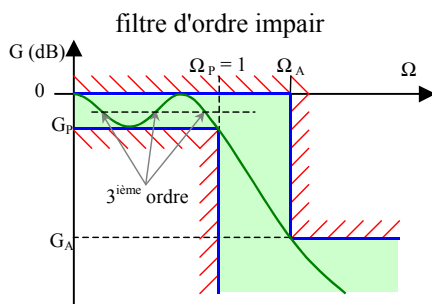
et ces polynômes peuvent être calculer avec la formule de récurrence : $T_n = 2\Omega \cdot T_{n-1} - T_{n-2}$.

A partir des paramètres fournis par le gabarit, on peut calculer ε et n .

$$\varepsilon^2 = 10^{\frac{-G_p}{10}} - 1$$

$$n \geq \frac{\operatorname{arccosh} \sqrt{10^{\frac{G_a}{10}} - 1}}{\operatorname{arccosh}(\Omega_a)}$$

La pulsation pour un gain de -3 dB est donnée par : $\Omega_{(-3dB)} = \cosh\left(\frac{1}{n} \cdot \operatorname{arccosh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)$

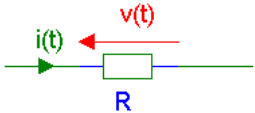
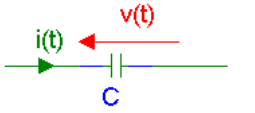
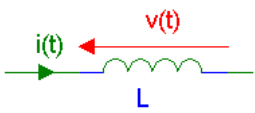


Les Filtres passifs

Ce chapitre commence par faire un rapide rappel sur les trois composants à la base des filtres passifs : résistances, condensateurs et inductances, puis il propose une fois que l'on a déterminé la fonction d'approximation et l'ordre du filtre, une méthode de réalisation à base de condensateurs et d'inductances.

L'utilisation des éléments des quartzs, des résonateurs céramiques et des filtres à ondes de surface (SAW) n'est pas traitée dans ce document.

Les composants passifs

composants passifs	notation temporelle	notation complexe de Laplace (P)
résistance 	$u_{(t)} = R \cdot i_{(t)}$	$U_{(P)} = R \cdot I_{(P)}$ $Z_{R(P)} = \frac{U_{(P)}}{I_{(P)}} = R$
condensateur 	$i_{(t)} = C \cdot \frac{du_{(t)}}{dt}$	$I_{(P)} = C \cdot (pU_{(P)} - u_{(0+)})$ $Z_{C(P)} = \frac{U_{(P)}}{I_{(P)}} = \frac{1}{C \cdot p}$ $u_{(0+)}$: condition initiale : tension aux bornes du condensateur à $t = 0+$
inductance 	$u_{(t)} = L \cdot \frac{di_{(t)}}{dt}$	$U_{(P)} = L \cdot (pI_{(P)} - i_{(0+)})$ $Z_{L(P)} = \frac{U_{(P)}}{I_{(P)}} = L \cdot p$ $i_{(0+)}$: condition initiale : courant dans l'inductance à $t = 0+$

Structure des passe-bas

En fonction de la valeur des impédances, on est en mesure de réaliser un filtre passe-bas suivant n'importe quelles fonctions d'approximation. Les valeurs des impédances sont extraites des tables (exemple Tableau 7) en fonction du type de filtre (Bessel, Butterworth ou Chebychev), de l'ordre du filtre, de l'ondulation dans la bande passante pour les filtres de Chebychev.

Pour finir, il faut transposer le filtre (Tableau 8) si nécessaire et le dénormaliser en fonction de la pulsation de coupure et de l'impédance du générateur et / ou de la charge.

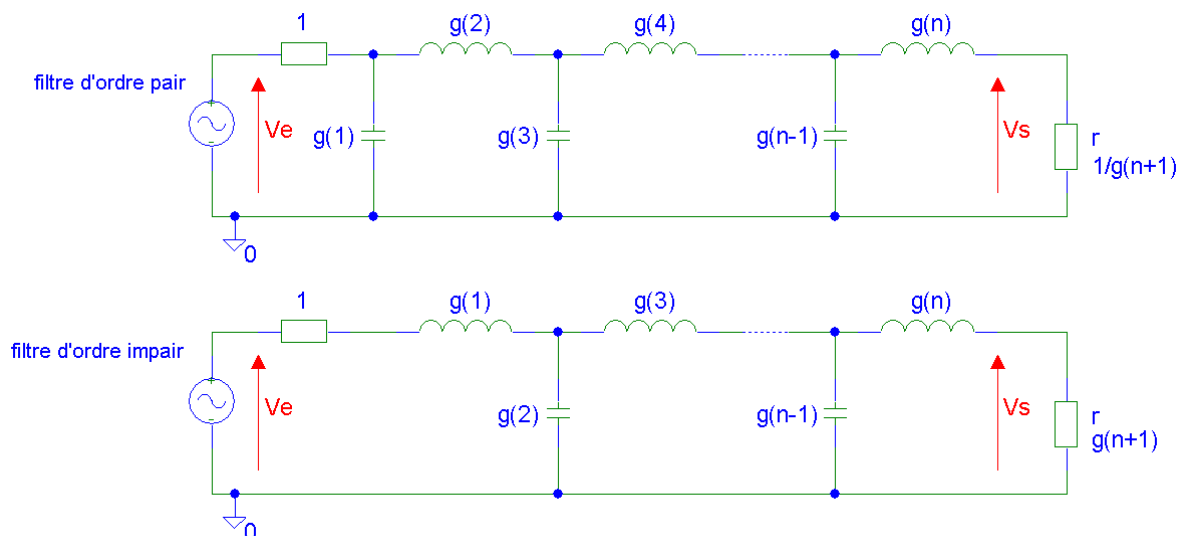


Figure 11 : structure des filtres passifs, passe-bas normalisés

Tableaux des coefficients

Ces tableaux donnent la valeur des impédances du filtre dont la structure est donnée par la Figure 11

Chebbychev :

	n	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}	g_{11}
Ondulation 0,5 dB	1	0,6986	1									
	2	1,4029	0,7071	1,9841								
	3	1,5963	1,0967	1,5963	1							
	4	1,6703	1,1926	2,3661	0,8419	1,9841						
	5	1,7058	1,2296	2,5408	1,2296	1,7058	1					
	6	1,7254	1,2479	2,6064	1,3137	2,4758	0,8696	1,9841				
	7	1,7372	1,2583	2,6381	1,3444	2,6381	1,2583	1,7372	1			
	8	1,7451	1,2647	2,6564	1,359	2,6964	1,3389	2,5093	0,8796	1,9841		
	9	1,7504	1,269	2,6678	1,3673	2,7239	1,3673	2,6678	1,269	1,7504	1	
	10	1,7543	1,2721	2,6754	1,3725	2,7392	1,3806	2,7231	1,3485	2,5239	0,8842	1,9841
Ondulation 1,0 dB	1	1,0177	1									
	2	1,8219	0,685	2,6599								
	3	2,0236	0,9941	2,0236	1							
	4	2,0991	1,0644	2,8311	0,7892	2,6599						
	5	2,1349	1,0911	3,0009	1,0911	2,1349	1					
	6	2,1546	1,1041	3,0634	1,1518	2,9367	0,8101	2,6599				
	7	2,1664	1,1116	3,0934	1,1736	3,0934	1,1116	2,1664	1			
	8	2,1744	1,1161	3,1107	1,1839	3,1488	1,1696	2,9685	0,8175	2,6599		
	9	2,1797	1,1192	3,1215	1,1897	3,1747	1,1897	3,1215	1,1192	2,1797	1	
	10	2,1836	1,1213	3,1286	1,1933	3,189	1,199	3,1738	1,1763	2,9824	0,821	2,6599

Tableau 7 : valeurs normalisées des impédances pour un filtre passif passe-bas de Chebbychev.

Le dernier point à -x dB (ondulation) est obtenu pour $\Omega_0 = 1$ rd/s

Transposition des impédances

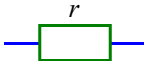
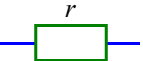
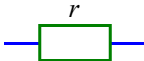
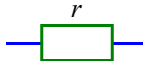
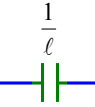
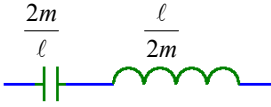
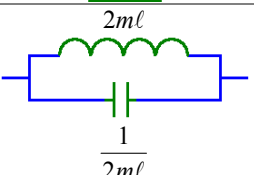
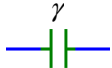
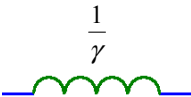
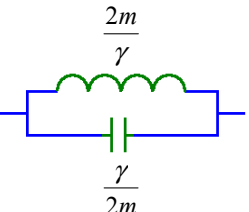
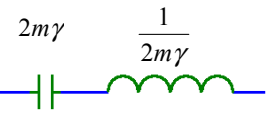
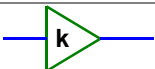
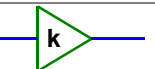
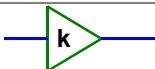
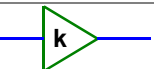
composants	passe-bas	passe-haut	passe-bande	coupe-bande
résistance				
inductance				
condensateur				
gain				

Tableau 8 : transposition des impédances

Les Filtres actifs

Ce chapitre commence par un petit rappel sur l'amplificateur opérationnel (ampli op) monté en amplificateur différentiel et différentes structures d'intégrateur, puis il détaille quatre structures différentes de filtres actifs construits autour d'un ou plusieurs amplificateurs opérationnels. L'utilisation des transistors comme éléments actifs n'est pas traitée dans ce document.

- Les filtres actifs ne sont pas obligatoirement stables, lorsque la valeur d'un ou plusieurs constituants varie, la stabilité doit être particulièrement étudiée.
- A cause de la limite fréquentielle des ampli op, ces filtres sont souvent limités aux fréquences basses, le plus souvent en dessous du mégahertz.
- Contrairement aux filtres passifs, il existe des méthodes automatiques de synthèse qui conduisent à des schémas simples et réalisables.

L'amplificateur opérationnel

Il est possible de calculer facilement le gain d'un montage inverseur ou non-inverseur à partir de l'amplificateur différentiel.

Amplificateur différentiel Rappel :

$$V_S = \frac{-Z_2}{Z_1} V_a + \frac{Z_4(Z_1 + Z_2)}{Z_1(Z_3 + Z_4)} V_b = A_{mc} \left(\frac{V_b + V_a}{2} \right) + A_{md} (V_b - V_a)$$

- $A_{mc} = \frac{Z_1 Z_4 - Z_2 Z_3}{Z_1(Z_3 + Z_4)}$: amplification du mode commun
- $A_{md} = \frac{Z_1 Z_4 + Z_2 Z_3 + 2Z_2 Z_4}{2Z_1(Z_3 + Z_4)}$: amplification du mode différentiel.

Si l'on ne veut amplifier que la différence $V_b - V_a$, il faut que $A_{mc} = 0$.

$$H_{diff} = \frac{V_S}{V_b - V_a} = \frac{Z_2}{Z_1} \quad \text{avec } Z_1 Z_4 = Z_2 Z_3$$

Si l'on prend en compte le gain de l'amplificateur opérationnel (A_0 amplification en boucle ouverte), on obtient :

$$V_S = \frac{A_0}{1 + \frac{Z_2}{Z_1} + A_0} \left(A_{mc} \left(\frac{V_b + V_a}{2} \right) + A_{md} (V_b - V_a) \right)$$

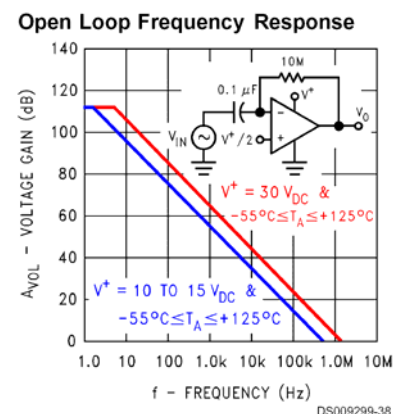
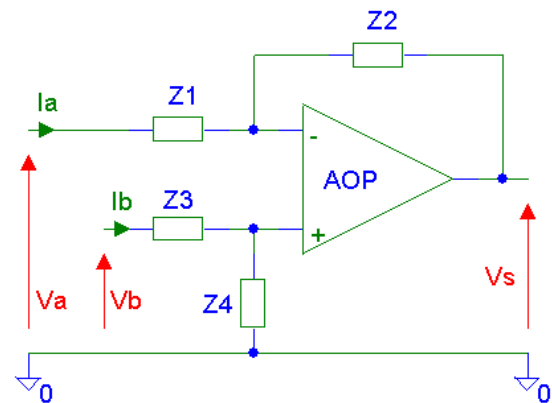


Figure 12 : gain en boucle ouverte d'un LM124

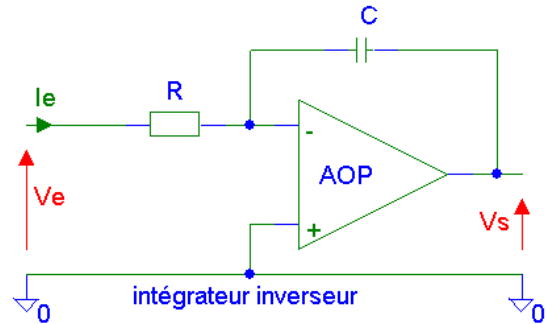
Intégrateurs

Intégrateur inverseur :

$$H = \frac{V_s}{V_e} = \frac{-1}{jRC\omega}$$

$$\text{Module : } |H| = \frac{1}{RC\omega}$$

$$\text{Argument : } \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$



Intégrateur non-inverseur :

$$\text{Gain de l'amplificateur : } k = \frac{R_a + R_b}{R_b} = 1 + \frac{R_a}{R_b}$$

$$H = \frac{V_s}{V_e} = \frac{kR_2}{R_1(1-k) + R_2 + jR_1R_2C\omega}$$

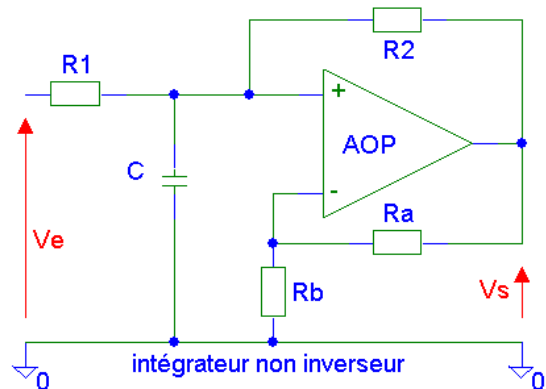
Pour avoir un intégrateur, il faut que la partie réelle du dénominateur soit nulle.

$$R_1(1-k) + R_2 = 0 \Rightarrow k = 1 + \frac{R_2}{R_1} \text{ donc } \frac{R_2}{R_1} = \frac{R_a}{R_b}$$

$$H = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \times \frac{1}{jR_1C\omega}$$

$$\text{Module : } |H| = \frac{2}{RC\omega} \text{ si } R_1 = R_2 = R_a = R_b$$

$$\text{Argument : } \varphi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$



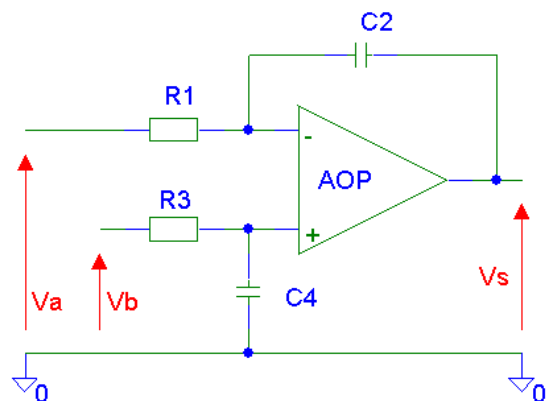
Intégrateur différentiel :

Il s'agit d'un cas particulier de l'amplificateur différentiel, avec

$$Z_1 = R_1, Z_2 = \frac{1}{jC_2\omega}, Z_3 = R_3, \text{ et } Z_4 = \frac{1}{jC_4\omega}.$$

Il faut respecter $Z_1Z_4 = Z_2Z_3$ donc $R_1C_2 = R_3C_4$

$$H = \frac{V_s}{V_b - V_a} = \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{1}{jR_1C_2\omega}$$



Intégrateur à capacité commutée :

Les 2 interrupteurs S1 et S2 sont commandés en opposition de phase, par une horloge de fréquence variable (F_H), avec un rapport cyclique de 50%.

- Phase 1 : S1 fermé, S2 ouvert.
Le condensateur C0 se charge vers V_e : $Q_1 = C_0V_e$
- Phase 2 : S1 ouvert, S2 fermé.
Le condensateur C0 se décharge vers 0 : $Q_2 = 0$

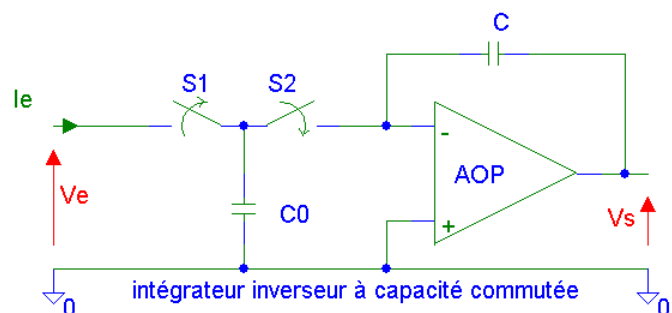


Figure 13 : intégrateur à capacité commutée

La variation de charge $\Delta Q = Q_1 - Q_2 = C_0 V_e$ crée un courant I car $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$. Le temps Δt correspond au temps d'un cycle formé par les phase 1 et phase 2. Il est donc égal à la période de l'horloge (F_H).

Le courant s'écrit sous la forme $I = C_0 F_H V_e$, ce qui est équivalent à $I = \frac{V_e}{R}$. On peut donc assimiler $\frac{1}{C_0 F_H} = R$.

La fonction de transfert du circuit (Figure 13) est donnée ci-dessous et elle correspond bien à celle d'un intégrateur.

$$H = \frac{V_s}{V_e} = \frac{-C_0 F_H}{jC\omega}$$

La constante de temps de cet intégrateur est égale à $\tau = \frac{C}{C_0 F_H}$. Il est possible de la faire varier en jouant sur la fréquence de l'horloge.

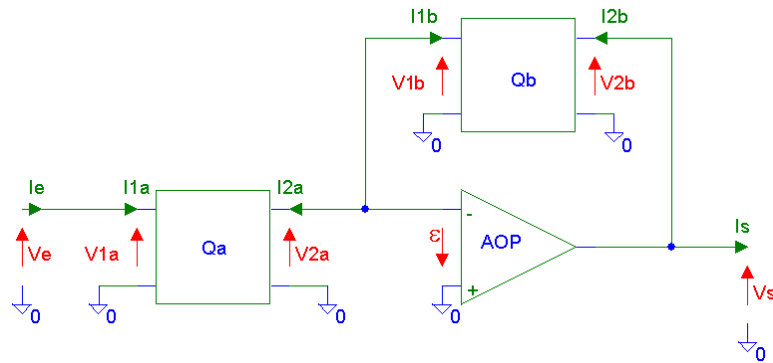
Intérêt :

Cet intégrateur est utilisé pour réaliser des filtres intégrés (*filtre à capacités commutées*) à base de la structure à variables d'état, dont on peut faire varier les paramètres (fréquence de coupure F_0 et facteur de qualité $Q=1/2m$) par la simple fréquence d'une horloge.

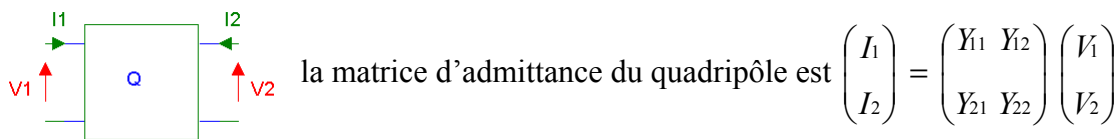
Inconvénient :

On se trouve en présence d'un système échantillonné, il faut donc satisfaire le critère de Nyquist (ou théorème de Shannon), à savoir, la fréquence d'horloge (F_H) doit être supérieure au double de la plus haute des fréquences du signal d'entrée. (V_e)

Filtre à contre réaction simple



Les quadripôles Q_a et Q_b peuvent être définis par leurs paramètres d'admittance.

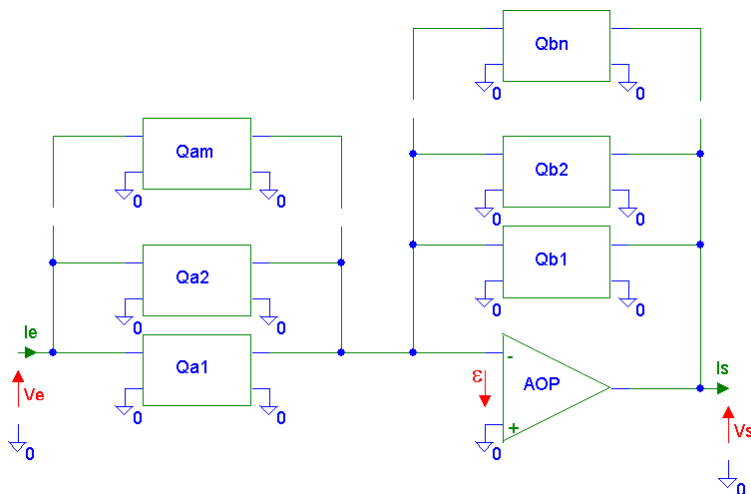


Les quadripôles Q_a et Q_b donnent $\begin{cases} I_{1a} = Y_{11a} \cdot V_{1a} + Y_{12a} \cdot V_{2a} \\ I_{2a} = Y_{21a} \cdot V_{1a} + Y_{22a} \cdot V_{2a} \end{cases}$ et $\begin{cases} I_{1b} = Y_{11b} \cdot V_{1b} + Y_{12b} \cdot V_{2b} \\ I_{2b} = Y_{21b} \cdot V_{1b} + Y_{22b} \cdot V_{2b} \end{cases}$ que l'on peut

simplifier car $\begin{cases} I_{2a} = -I_{1b} \\ V_{2a} = V_{1b} = -\varepsilon \approx 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} V_{1a} = V_e \\ V_{2b} = V_s \end{cases}$ et l'on obtient $Y_{21a} \cdot V_e = -Y_{12b} \cdot V_s$ soit

$$H = \frac{V_s}{V_e} = -\frac{Y_{21a}}{Y_{12b}}$$

Généralisation :



Il est facile de généraliser car les admittances en parallèles s'additionnent.

$$H = -\frac{\sum_{i=1}^m Y_{21ai}}{\sum_{j=1}^n Y_{12bj}}$$

Lorsque les quadripôles sont symétriques, c'est à dire que l'on peut permuter I_1 , V_1 avec I_2 , V_2 , alors $Y_{12} = Y_{21}$ et $Y_{11} = Y_{22}$.

Quelques exemples de quadripôles ainsi que leur admittance :

	$Y_{21} = -\frac{1}{R}$		$Y_{21} = -jC\omega$
	$Y_{21} = -\frac{jC\omega}{1 + jRC\omega}$		$Y_{21} = -\frac{1 + jRC\omega}{R}$
	$Y_{21} = -\frac{1}{2R\left(1 + j\frac{RC\omega}{2}\right)}$		$Y_{21} = -\frac{jC\omega}{2} \times \frac{jRC\omega}{1 + 2jRC\omega}$

Exemple : avec le cas d'un filtre d'égalisation pour haut-parleur (Linkwitz Transform Circuit)

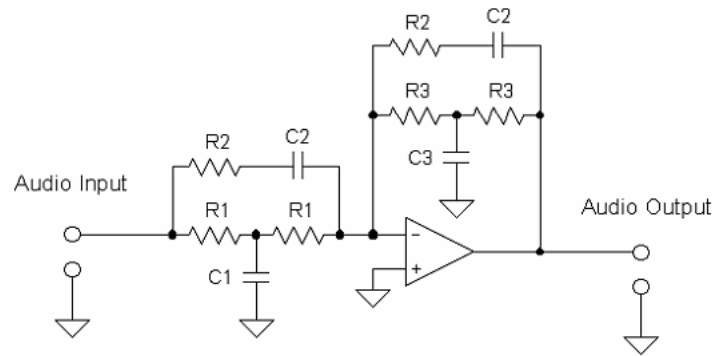


Figure 14 : circuit d'égalisation de Linkwitz.

source : <http://www.linkwitzlab.com/>

R1	8,44 kΩ	R2	36,98 kΩ	R3	70,32 kΩ
C1	1905 nF	C2	56 nF	C3	228 nF

Le quadripôle Q_a est défini par la somme de Y_{21a1} et Y_{21a2} : $Y_{21a} = Y_{21a1} + Y_{21a2}$ et le quadripôle Q_b est défini par la somme de Y_{21b2} et Y_{21b3} : $Y_{21b} = Y_{21b2} + Y_{21b3}$.

$$Y_{21a2} = -\frac{jC_2\omega}{1 + jR_2C_2\omega} \quad Y_{21a1} = -\frac{1}{2R_1\left(1 + j\frac{R_1C_1\omega}{2}\right)} \quad Y_{21b2} = -\frac{jC_2\omega}{1 + jR_2C_2\omega} \quad Y_{21b3} = -\frac{1}{2R_3\left(1 + j\frac{R_3C_3\omega}{2}\right)}$$

La fonction de transfert du filtre est donnée par $H = \frac{V_s}{V_e} = -\frac{Y_{21a}}{Y_{21b}}$

soit $H = \frac{R_3}{R_1} \times \frac{1 + j(2R_1 + R_2)C_2\omega - R_1^2C_1C_2\omega^2}{1 + j(2R_3 + R_2)C_2\omega - R_3^2C_3C_2\omega^2} \times \frac{2 + jR_3C_3\omega}{2 + jR_1C_1\omega}$ que l'on peut écrire sous la forme

$$H = k \times \frac{1 + 2m_1j\frac{\omega}{\omega_1} - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}{1 + 2m_2j\frac{\omega}{\omega_2} - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2} \times \frac{1 + j\frac{\omega}{\omega_3}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_4}} \text{ et qui donne par identification et application numérique}$$

$k = 8,332$	$\omega_1 = 362,757 \text{ rd/s}$	$\omega_2 = 125,852 \text{ rd/s}$	$\omega_3 = 124,743 \text{ rd/s}$	$\omega_4 = 124,392 \text{ rd/s}$
$20 \log(k) = 18,415 \text{ dB}$	$f_1 = 57,735 \text{ Hz}$	$f_2 = 20,03 \text{ Hz}$	$f_3 = 19,853 \text{ Hz}$	$f_4 = 19,798 \text{ Hz}$
	$m_1 = 0,547$	$m_2 = 0,626$		

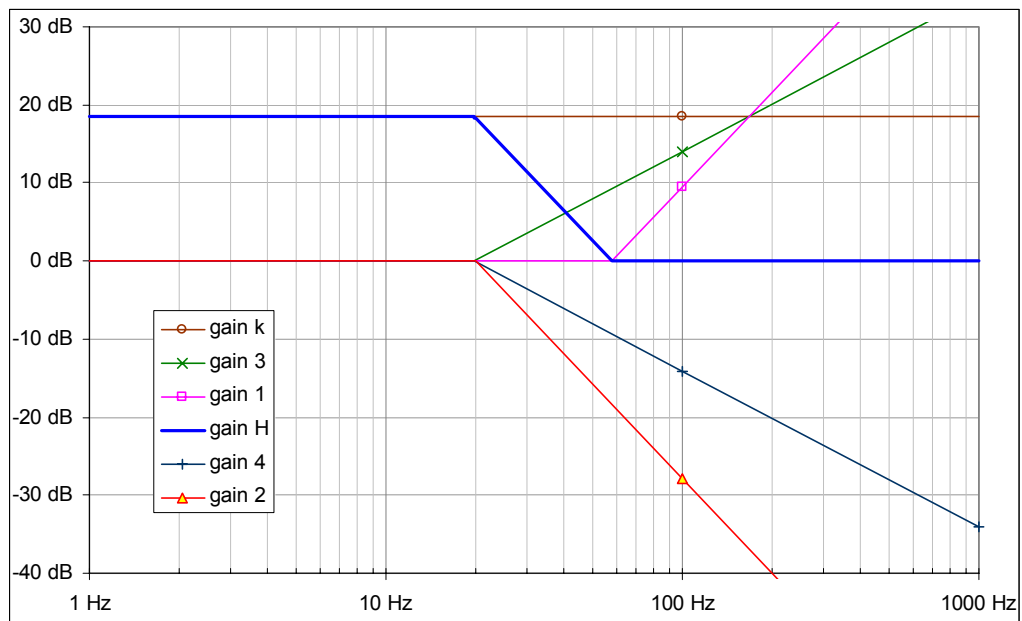


Figure 15 : diagrammes asymptotiques

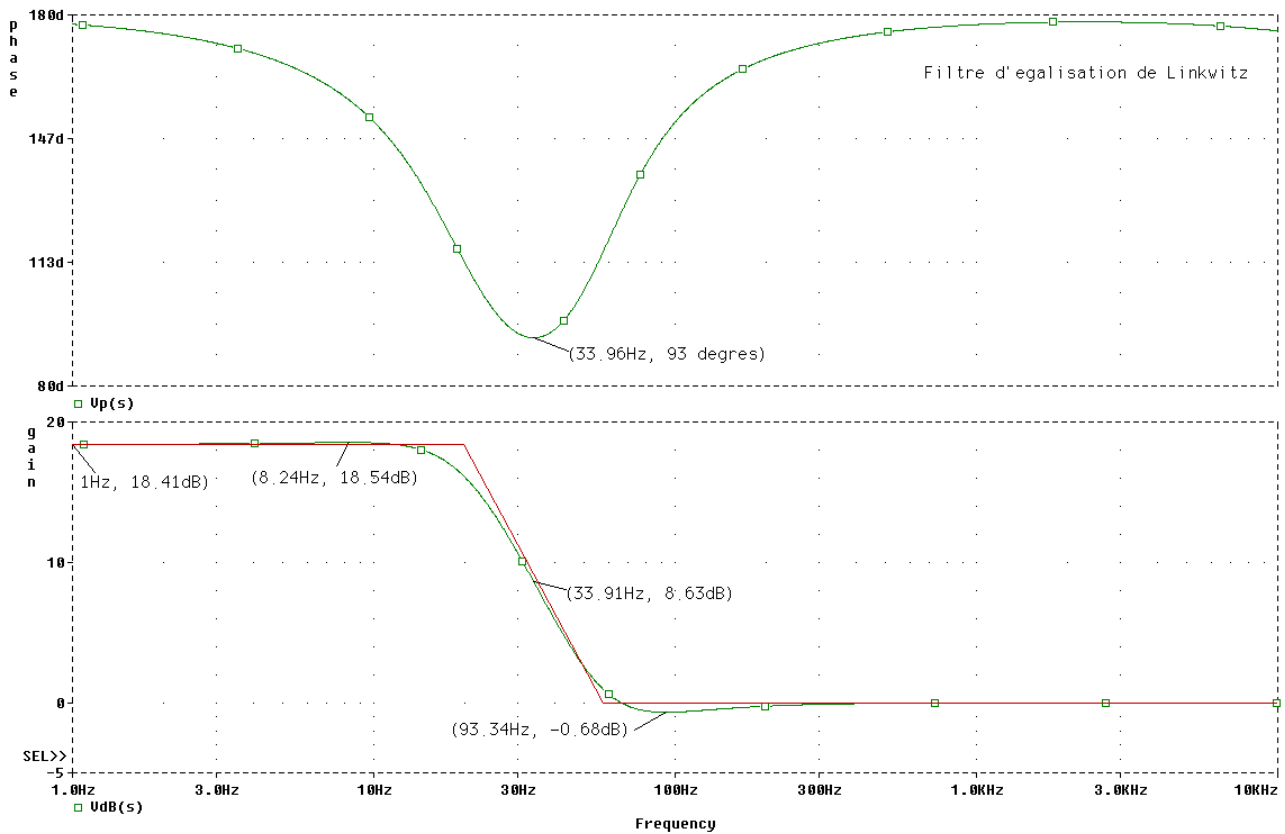
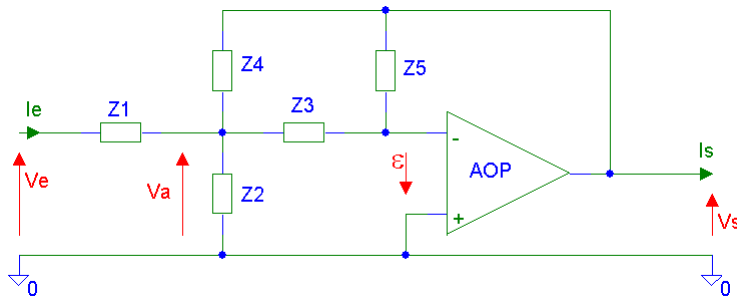


Figure 16 : phase et gain, ainsi que le diagramme asymptotique.

Filtre à contre réaction multiple (MFB) : structure de Rauch

Elle est basée sur un amplificateur inverseur.



Il peut être plus facile de faire le calcul de la fonction de transfert H à partir des admittances que des impédances

$$Z_1 = \frac{1}{Y_1} \quad Z_2 = \frac{1}{Y_2} \quad Z_3 = \frac{1}{Y_3} \quad Z_4 = \frac{1}{Y_4} \quad Z_5 = \frac{1}{Y_5}$$

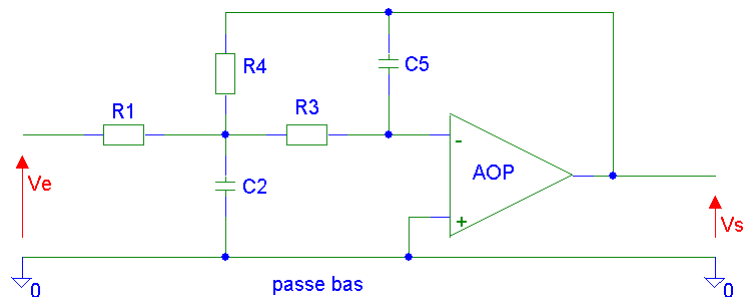
$$H = \frac{V_s}{V_e} = \frac{-1}{\frac{Z_1}{Z_4} + \frac{Z_1}{Z_5} + \frac{Z_3}{Z_5} + \frac{Z_1 Z_3}{Z_2 Z_5} + \frac{Z_1 Z_3}{Z_4 Z_5}} \quad \text{ou} \quad H = \frac{-Y_1 Y_3}{Y_1 Y_5 + Y_2 Y_5 + Y_3 Y_4 + Y_3 Y_5 + Y_4 Y_5}$$

Impédance d'entrée : elle est donnée sous sa forme littérale par $Z_e = Z_1 + \frac{Z_2 Z_3 Z_4}{Z_2 Z_3 + Z_2 Z_4 + Z_2 Z_5 + Z_3 Z_4}$

Passe-bas : $Z_1 = R_1 \quad Z_2 = \frac{1}{jC_2\omega} \quad Z_3 = R_3 \quad Z_4 = R_4$

$$Z_5 = \frac{1}{jC_5\omega}$$

$$H = \frac{-R_4}{R_1} \times \frac{1}{1 + j \frac{R_1 R_3 + R_1 R_4 + R_3 R_4}{R_1} C_5 \omega - R_3 R_4 C_2 C_5 \omega^2}$$



La fonction de transfert d'un filtre passe-bas du second ordre est de la forme :

$$H = K_0 \times \frac{1}{1 + 2mj \frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

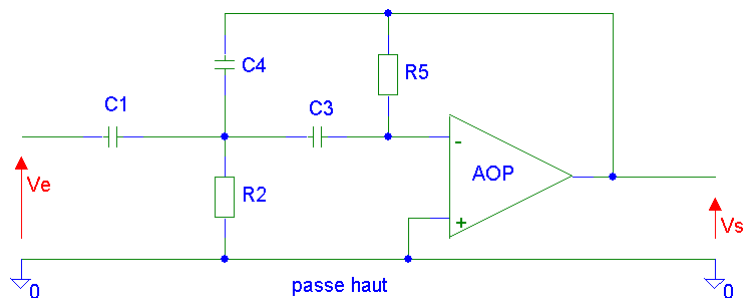
Par identification, on obtient :

$$K_0 = \frac{-R_4}{R_1} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{R_3 R_4 C_2 C_5}} \quad \text{et} \quad m = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) \sqrt{R_3 R_4 \frac{C_5}{C_2}}$$

Passe-haut : $Z_1 = \frac{1}{jC_1\omega} \quad Z_2 = R_2 \quad Z_3 = \frac{1}{jC_3\omega}$

$$Z_4 = \frac{1}{jC_4\omega} \quad Z_5 = R_5$$

$$H = \frac{R_2 R_5 C_1 C_3 \omega^2}{1 + jR_2 (C_1 + C_3 + C_4) \omega - R_2 R_5 C_3 C_4 \omega^2}$$



La fonction de transfert d'un filtre passe-haut du second ordre est de la forme :

$$H = K_0 \times \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + 2mj \frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Par identification, on obtient :

$$K_0 = \frac{C_1}{C_4} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{R_2 R_5 C_3 C_4}} \quad \text{et} \quad m = \frac{1}{2} (C_1 + C_3 + C_4) \sqrt{\frac{R_2}{R_5 C_3 C_4}}$$

Dans cette configuration en filtre passe-haut, l'impédance d'entrée s'écrit :

$$Z_e = \frac{1}{jC_1\omega} + \frac{R_2}{1 + jR_2 (C_3 + C_4) \omega - R_2 R_5 C_3 C_4 \omega^2}$$

Dans la bande passante ($\omega > \omega_0$), l'impédance d'entrée tend vers zéro, comme Z_{C1} , ce qui peut par exemple créer l'instabilité de l'étage en amont.

Passe-bande :

La fonction de transfert d'un filtre passe-bande du second ordre est de la forme :

$$H = K_0 \times \frac{j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + 2mj \frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

• **Configuration a :** $Z_1 = R_1$ $Z_2 = R_2$ ou $\frac{1}{jC_2\omega}$

$$Z_3 = \frac{1}{jC_3\omega} \quad Z_4 = \frac{1}{jC_4\omega} \quad Z_5 = R_5$$

$$H = \frac{-1}{\frac{R_1}{R_5} \left(1 + \frac{C_4}{C_3}\right) + jR_1C_4\omega + \frac{1}{jR_5C_3\omega} \left(1 + \frac{R_1}{Z_2}\right)}$$

$$\square Z_2 = R_2 \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 R_5 C_3 C_4}}$$

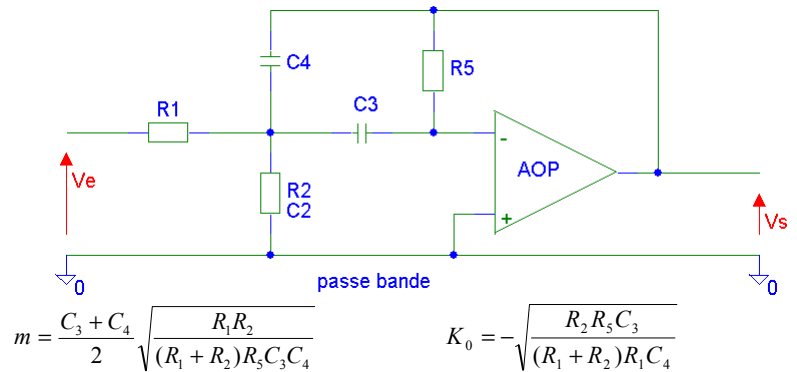
Simplifications possibles $C_3 = C_4 = C$ $R_1 = R_5$ $R_2 = nR$

$$C_3 = C_4 = C \quad R_1 = R_2 = R$$

$$C_3 = C_4 = C \quad R_1 = R$$

R_2 : non câblée

exemple Si l'on fixe ω_0 , m et C on obtient :



$$m = \sqrt{\frac{nR}{(1+n)R_5}}$$

$$\omega_0 = \frac{(1+n)m}{RC}$$

$$K_0 = \frac{-n}{(1+n)m}$$

$$m = \sqrt{\frac{R}{2R_5}}$$

$$\omega_0 = \frac{2m}{RC}$$

$$K_0 = \frac{-1}{2m}$$

$$m = \sqrt{\frac{R}{R_5}}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{RR_5}C}$$

$$K_0 = \frac{-1}{m}$$

$$R_1 = \frac{m}{C\omega_0}$$

$$R_5 = \frac{1}{mC\omega_0}$$

R_2 : non câblée

$$\square Z_2 = \frac{1}{jC_2\omega} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{R_1 R_5 C_3 C_4}}$$

$$m = \frac{C_2 + C_3 + C_4}{2} \sqrt{\frac{R_1}{R_5 C_3 C_4}}$$

$$K_0 = -\sqrt{\frac{R_5 C_3}{R_1 C_4}}$$

$$\square Z_2 : \text{non câblée} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{R_1 R_5 C_3 C_4}}$$

$$m = \frac{C_3 + C_4}{2} \sqrt{\frac{R_1}{R_5 C_3 C_4}}$$

$$K_0 = -\sqrt{\frac{R_5 C_3}{R_1 C_4}}$$

• **Configuration b :** $Z_1 = \frac{1}{jC_1\omega}$ $Z_2 = R_2$ ou $\frac{1}{jC_2\omega}$

$$Z_3 = R_3 \quad Z_4 = R_4 \quad Z_5 = \frac{1}{jC_5\omega}$$

$$H = \frac{-jR_4C_1\omega}{1 + j(R_3 + R_4)C_5\omega + j\frac{R_3R_4C_5\omega}{Z_2} - R_3R_4C_1C_5\omega^2}$$

Elle n'a pas d'intérêt particulier par rapport à la précédente.

$$\square Z_2 = R_2 \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{R_3 R_4 C_1 C_5}}$$

$$m = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) \sqrt{R_3 R_4 \frac{C_5}{C_1}}$$

$$K_0 = -\sqrt{\frac{R_4 C_1}{R_3 C_5}}$$

$$\square Z_2 = \frac{1}{jC_2\omega} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{R_3 R_4 (C_1 + C_2) C_5}}$$

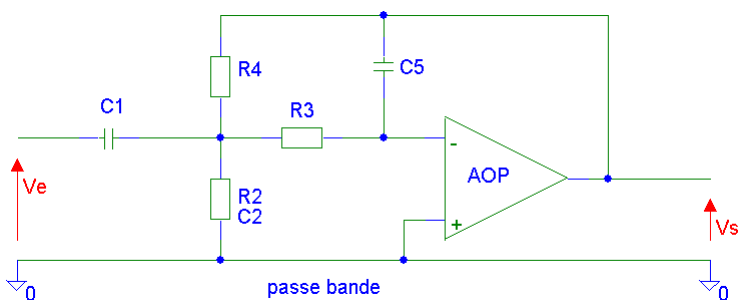
$$m = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) \sqrt{R_3 R_4 \frac{C_5}{(C_1 + C_2)}}$$

$$K_0 = -\sqrt{\frac{R_4}{R_3 (C_1 + C_2) C_5}} \times C_1$$

$$\square Z_2 : \text{non câblée} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{R_3 R_4 C_1 C_5}}$$

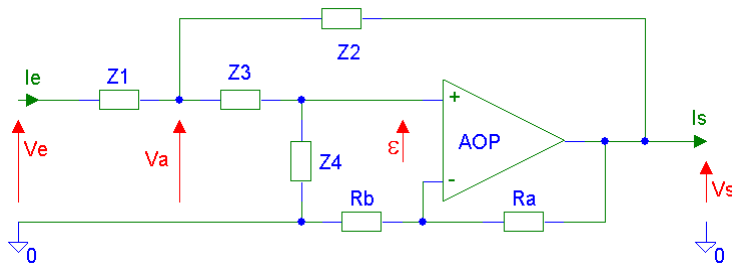
$$m = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) \sqrt{R_3 R_4 \frac{C_5}{C_1}}$$

$$K_0 = -\sqrt{\frac{R_4 C_1}{R_3 C_5}}$$



Filtre à source de tension contrôlée (VCVS) : structure de Sallen and Key

Elle est basée sur un amplificateur de tension non-inverseur.



Le gain de l'amplificateur est fixé par R_a et R_b , et il est noté $k = \frac{R_a + R_b}{R_b}$, et

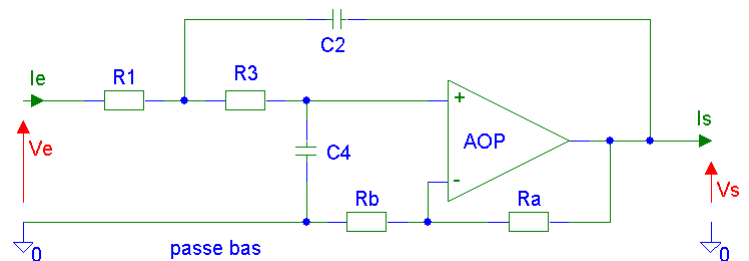
$k \geq 1$. Il est possible sous certaines conditions d'utiliser cette structure avec comme amplificateur, un simple transistor en collecteur commun ($k \sim 1$).

$$H = \frac{V_s}{V_e} = \frac{kZ_2Z_4}{Z_1Z_4(1-k) + Z_1(Z_2 + Z_3) + Z_2(Z_3 + Z_4)}$$

Impédance d'entrée : elle est donnée sous sa forme littérale par $Z_e = Z_1 + \frac{Z_2(Z_3 + Z_4)}{Z_2 + Z_3 + Z_4(1-k)}$

Passe-bas : $Z_1=R_1$ $Z_2=\frac{1}{jC_2\omega}$ $Z_3=R_3$ $Z_4=\frac{1}{jC_4\omega}$

$$H = \frac{k}{1 + j(R_1C_2(1-k) + R_1C_4 + R_3C_4)\omega - R_1R_3C_2C_4\omega^2}$$



La fonction de transfert d'un filtre passe-bas du second ordre est de la forme :

$$H = K_0 \times \frac{1}{1 + 2mj \frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad K_0 = k \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{R_1R_3C_2C_4}} \quad \text{et} \quad m = \frac{1}{2} \left(\frac{R_1C_2(1-k) + R_1C_4 + R_3C_4}{\sqrt{R_1R_3C_2C_4}} \right)$$

Simplifications possibles • En choisissant, $R_1 = R_3 = R$ et $C_2 = C_4 = C$ on obtient $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ et $m = \frac{3-k}{2}$. Il est donc possible de régler indépendamment la fréquence de coupure $F_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ et le coefficient d'amortissement $m \leq 1$.

Si $k > 3$, m est négatif et le système est instable (oscillations).

exemple : Si l'on fixe ω_0 , m et C on obtient : $R = \frac{1}{C\omega_0}$ $k = 3 - 2m$

• Dans le cas de $k=1$ ($R_a = 0\Omega$ et R_b non câblée), et en choisissant $R_1 = R_3 = R$ on obtient :

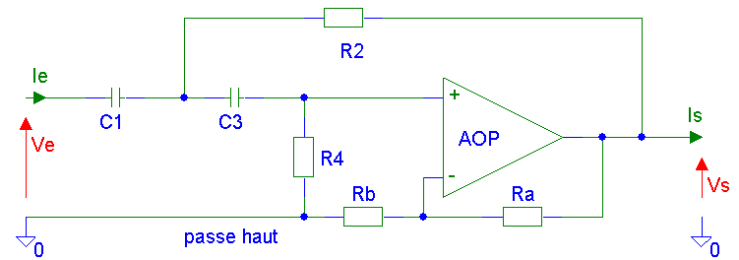
$$m = \sqrt{\frac{C_4}{C_2}} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{1}{mRC_2} \quad \text{En fixant } \omega_0, m \text{ et } R \text{ on obtient :} \quad C_2 = \frac{1}{m\omega_0 R} \quad C_4 = \frac{m}{\omega_0 R}$$

Cette simplification est souvent proposée dans la littérature comme la structure de Sallen and Key, mais elle présente peut d'intérêt, car elle donne des valeurs de condensateur difficile d'approvisionnement.

Passe-haut : $Z_1 = \frac{1}{jC_1\omega}$ $Z_2 = R_2$ $Z_3 = \frac{1}{jC_3\omega}$

$$Z_4 = R_4$$

$$H = \frac{-kR_2R_4C_1C_3\omega^2}{1 + j(R_2C_1 + R_2C_3 + R_4C_3(1-k))\omega - R_2R_4C_1C_3\omega^2}$$



La fonction de transfert d'un filtre passe-haut du second ordre est de la forme :

$$H = K_0 \times \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + 2mj \frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad K_0 = -k \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{R_2R_4C_1C_3}} \quad \text{et} \quad m = \frac{1}{2} \left(\frac{R_2C_1 + R_2C_3 + R_4C_3(1-k)}{\sqrt{R_2R_4C_1C_3}} \right)$$

Simplifications possibles • En choisissant, $R_2 = R_4 = R$ et $C_1 = C_3 = C$ on obtient $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ et $m = \frac{3-k}{2}$. Il est donc possible

de régler indépendamment la fréquence de coupure $F_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ et le coefficient d'amortissement $m \leq 1$.

Si $k > 3$, m est négatif et le **système est instable** (oscillations).

exemple : Si l'on fixe ω_0 , m et C on obtient : $R = \frac{1}{C\omega_0}$ $k = 3 - 2m$

• Dans le cas de $k=1$, et en choisissant $C_1 = C_3 = C$ on obtient : $m = \sqrt{\frac{R_2}{R_4}}$ et $\omega_0 = \frac{1}{mCR_4}$.

exemple : Si l'on fixe ω_0 , m et C on obtient : $R_2 = \frac{m}{\omega_0 C}$ $R_4 = \frac{1}{m\omega_0 C}$

Dans cette configuration en filtre passe-haut, l'impédance d'entrée s'écrit :

$$Z_e = \frac{1}{jC_1\omega} + \frac{R_2(1 + jR_4C_3\omega)}{1 + j(R_2 + R_4(1-k))C_3\omega}$$

Dans la bande passante ($\omega > \omega_0$), l'impédance d'entrée tend vers $Z_{e(\omega > \omega_0)} = \frac{R_2R_4}{R_2 + R_4(1-k)}$ mais pour les hautes

fréquences ($\sim 1\text{MHz}$), le gain k tendant vers zéro (l'amplificateur opérationnel a une caractéristique passe-bas),

l'impédance d'entrée du filtre tend alors vers $Z_{e(\omega \gg \omega_0)} = \frac{R_2R_4}{R_2 + R_4}$

Passe-bande :

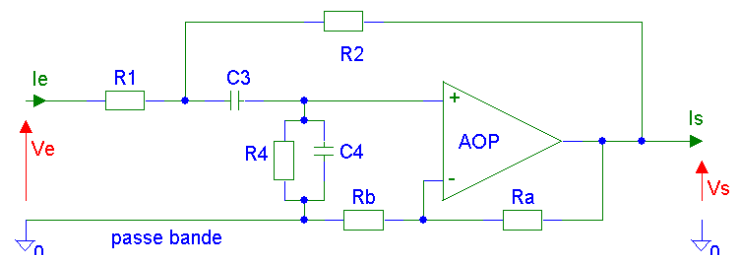
La fonction de transfert d'un filtre passe-bande du second ordre est de la forme :

$$H = K_0 \times \frac{j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + 2mj \frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Configuration a :

$$Z_1 = R_1 \quad Z_2 = R_2 \quad Z_3 = \frac{1}{jC_3\omega} \quad Z_4 = \frac{R_4}{1 + jR_4C_4\omega}$$

La structure précédente ne permet pas de construire de filtre passe-bande par le simple choix des impédances Z_1 à Z_4 . Il faut donc modifier un peu la structure, et il existe différentes solutions.



$$H = \frac{k \times j \frac{R_2 R_4 C_3 \omega}{R_1 + R_2}}{1 + j \left(\frac{R_1 R_4 C_4 (2-k) + R_2 (R_4 C_4 + R_4 C_3 + R_1 C_3)}{R_1 + R_2} \right) \omega - \frac{R_1 R_2 R_4 C_3 C_4 \omega^2}{R_1 + R_2}}$$

Par identification, on obtient :

$$K_0 = k \sqrt{\frac{R_2 R_4 C_3}{(R_1 + R_2) R_1 C_4}} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 R_4 C_3 C_4}}$$

et $m = \frac{R_1 R_4 C_4 (2-k) + R_2 (R_4 C_4 + R_4 C_3 + R_1 C_3)}{2 \times \sqrt{(R_1 + R_2) R_1 R_2 R_4 C_3 C_4}}$

Simplifications possibles • En choisissant, $R_1 = R_2 = R$ $R_1 + R_2 = R_4 = 2R$ et $C_3 = C_4 = C$ on obtient :

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} \quad m = \frac{9-2k}{4} \quad \text{et} \quad K_0 = k$$

La fréquence de coupure et le coefficient d'amortissement sont indépendants. Le coefficient d'amortissement m est compris entre 1,25 et 0 pour k compris entre 1 et 4,5.

exemple : Si l'on fixe ω_0 , m et C on obtient : $R = \frac{1}{C \omega_0}$ $k = \frac{9}{2} - 2m$

• En choisissant, $R_1 = R_2 = R_4 = R$ et $C_3 = C_4 = C$ on obtient :

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{2}}{RC} \quad m = \frac{5-k}{2\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad K_0 = \frac{k}{\sqrt{2}}$$

Le coefficient d'amortissement m est compris entre 1,414 et 0 pour k compris entre 1 et 5.

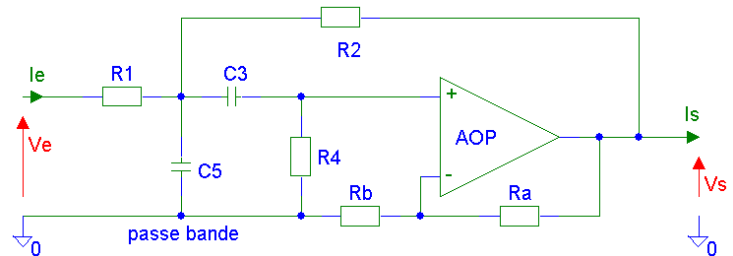
exemple : Si l'on fixe ω_0 , m et C on obtient : $R = \frac{\sqrt{2}}{C \omega_0}$ $k = 5 - 2m\sqrt{2}$ $K_0 = \frac{5}{\sqrt{2}} - 2m$

Configuration b :

La forme littérale de la fonction de transfert est :

$$H = \frac{V_s}{V_e} = \frac{k Z_2 Z_4}{Z_1 Z_4 (1-k) + Z_1 (\alpha Z_2 + Z_3) + Z_2 (Z_3 + Z_4)}$$

avec $\alpha = 1 + \frac{Z_3 + Z_4}{Z_5}$



En posant : $Z_1 = R_1$ $Z_2 = R_2$ $Z_3 = \frac{1}{jC_3 \omega}$

$Z_4 = R_4$ et $Z_5 = \frac{1}{jC_5 \omega}$, on obtient bien

un filtre passe-bande.

Par identification, on obtient :

$$K_0 = k \sqrt{\frac{R_2 R_4 C_3}{(R_1 + R_2) R_1 C_5}} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 R_4 C_3 C_5}} \quad \text{et} \quad m = \frac{(R_1 R_4 (1-k) + R_1 R_2 + R_2 R_4) C_3 + R_1 R_2 C_5}{2 \times \sqrt{(R_1 + R_2) R_1 R_2 R_4 C_3 C_5}}$$

Simplifications possibles • En choisissant, $R_1 = R_2 = R$ $R_1 + R_2 = R_4 = 2R$ et $C_3 = C_5 = C$ on obtient :

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} \quad m = \frac{3-k}{2} \quad \text{et} \quad K_0 = k$$

La fréquence de coupure et le coefficient d'amortissement sont indépendants. Le coefficient d'amortissement m est compris entre 1 et 0 pour k compris entre 1 et 3.

exemple : Si l'on fixe ω_0 , m et C on obtient : $R = \frac{1}{C \omega_0}$ $k = 3 - 2m$

• En choisissant, $R_1 = R_2 = R_4 = R$ et $C_3 = C_5 = C$ on obtient :

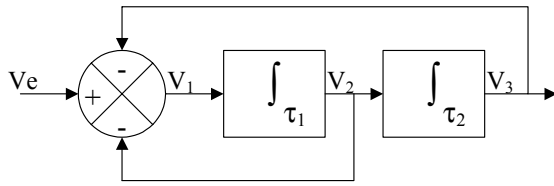
$$\omega_0 = \frac{\sqrt{2}}{RC} \quad m = \frac{4-k}{2\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad K_0 = \frac{k}{\sqrt{2}}$$

Le coefficient d'amortissement m est compris entre 1,06 et 0 pour k compris entre 1 et 4.

exemple : Si l'on fixe ω_0 , m et C on obtient : $R = \frac{\sqrt{2}}{C \omega_0}$ $k = 4 - 2m\sqrt{2}$ $K_0 = 2(\sqrt{2} - m)$

Filtre à variable d'état : filtres universels

Il est basé sur l'utilisation d'intégrateurs et de sommateurs. Il présente la particularité de fournir en même temps une sortie passe-bas, une sortie passe-haut et une sortie passe-bande.



$$V_1 = Ve - V_2 - V_3$$

$$V_2 = \frac{1}{\tau_1 p} V_1 \quad V_3 = \frac{1}{\tau_2 p} V_2$$

Sortie en V_1 :

$$\frac{V_1}{Ve} = \frac{\tau_1 \tau_2 p^2}{1 + \tau_2 p + \tau_1 \tau_2 p^2}$$

filtre passe-haut

Sortie en V_2 :

$$\frac{V_2}{Ve} = \frac{\tau_2 p}{1 + \tau_2 p + \tau_1 \tau_2 p^2}$$

filtre passe-bande

Sortie en V_3 :

$$\frac{V_3}{Ve} = \frac{1}{1 + \tau_2 p + \tau_1 \tau_2 p^2}$$

filtre passe-bas

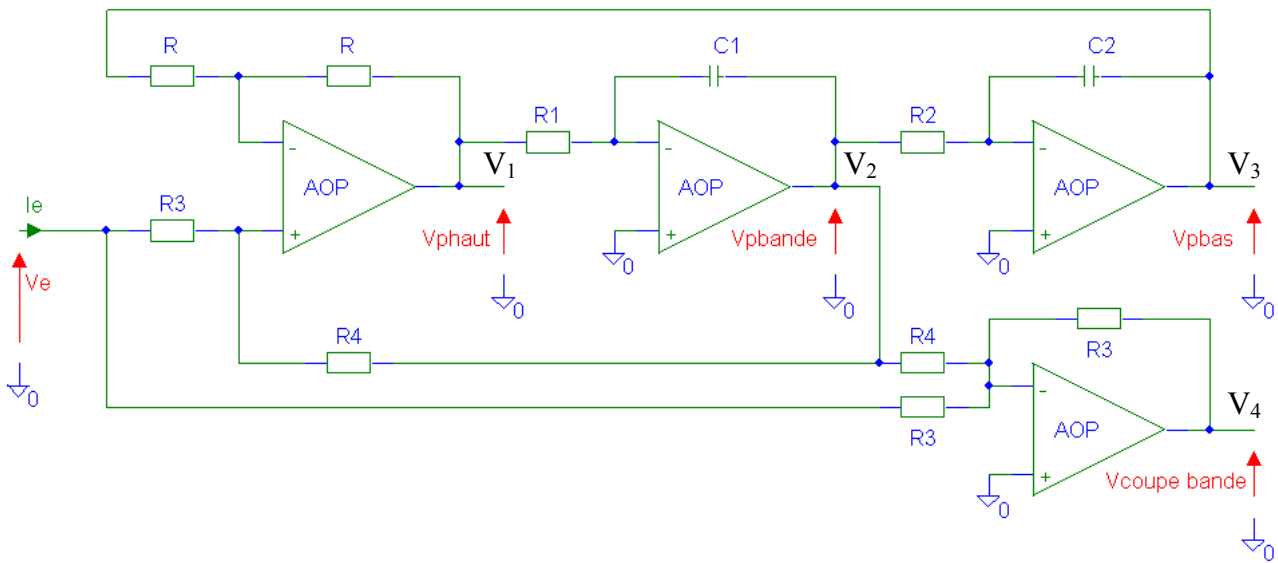


Figure 17 : Filtre à variable d'état (variante 1)

Cette structure est aussi appelée « cellule biquadratique »

$$V_1 = \frac{2R_4}{R_3 + R_4} Ve + \frac{2R_3}{R_3 + R_4} V_2 - V_3 \quad V_2 = \frac{-1}{jR_1 C_1 \omega} V_1 \quad V_3 = \frac{-1}{jR_2 C_2 \omega} V_2 \quad V_4 = -Ve - \frac{R_3}{R_4} V_2$$

Passe-haut : $V_{phaut} = V_1$

$$H_{phaut} = \frac{V_1}{Ve} = \frac{2R_4}{R_3 + R_4} \times \frac{-R_1 R_2 C_1 C_2 \omega^2}{1 + \frac{2R_3}{R_3 + R_4} jR_2 C_2 \omega - R_1 R_2 C_1 C_2 \omega^2}$$

La fonction de transfert d'un filtre passe-haut du second ordre est de la forme : Par identification, on obtient :

$$H = K_0 \times \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + 2mj \frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad K_0 = \frac{-2R_4}{R_3 + R_4} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad \text{et} \quad m = \frac{R_3}{R_3 + R_4} \sqrt{\frac{R_2 C_2}{R_1 C_1}}$$

Passe-bande : $V_{pbande} = V_2$

$$H_{pbande} = \frac{V_2}{V_1} \times \frac{V_1}{V_e} = \frac{-1}{jR_1C_1\omega} \times H_{pbande} = \frac{2R_4}{R_3 + R_4} \times \frac{-jR_2C_2\omega}{1 + \frac{2R_3}{R_3 + R_4}jR_2C_2\omega - R_1R_2C_1C_2\omega^2}$$

La fonction de transfert d'un filtre passe-bande du second ordre est de la forme : Par identification, on obtient :

$$H = K_0 \times \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + 2mj\frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad K_0 = \frac{-R_4}{R_3} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{R_1R_2C_1C_2}} \quad \text{et} \quad m = \frac{R_3}{R_3 + R_4} \sqrt{\frac{R_2C_2}{R_1C_1}}$$

Attention, cette sortie est en opposition de phase par rapport aux sorties passe-haut et passe-bas.

Passe-bas : $V_{pbas} = V_3$

$$H_{pbas} = \frac{V_3}{V_2} \times \frac{V_2}{V_e} = \frac{-1}{jR_2C_2\omega} \times H_{pbande} = \frac{2R_4}{R_3 + R_4} \times \frac{1}{1 + \frac{2R_3}{R_3 + R_4}jR_2C_2\omega - R_1R_2C_1C_2\omega^2}$$

La fonction de transfert d'un filtre passe-bas du second ordre est de la forme : Par identification, on obtient :

$$H = K_0 \times \frac{1}{1 + 2mj\frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad K_0 = \frac{2R_4}{R_3 + R_4} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{R_1R_2C_1C_2}} \quad \text{et} \quad m = \frac{R_3}{R_3 + R_4} \sqrt{\frac{R_2C_2}{R_1C_1}}$$

Coupe-bande : $V_{coupe\ bande} = V_4$

$$H_{coupebande} = \frac{V_4}{V_e} = \frac{1 - R_1R_2C_1C_2\omega^2}{1 + \frac{2R_3}{R_3 + R_4}jR_2C_2\omega - R_1R_2C_1C_2\omega^2}$$

La fonction de transfert d'un filtre coupe-bande du second ordre est de la forme : Par identification, on obtient :

$$H = K_0 \times \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + 2mj\frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad K_0 = 1 \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{R_1R_2C_1C_2}} \quad \text{et} \quad m = \frac{R_3}{R_3 + R_4} \sqrt{\frac{R_2C_2}{R_1C_1}}$$

Attention, cette sortie est aussi en opposition de phase par rapport aux sorties passe-haut et passe-bas.

Intérêt :

Cette structure permet d'avoir en même temps un filtre passe-bas, passe-haut et passe-bande.

Elle permet de réaliser des filtres avec un fort facteur de qualité ($Q=1/2m$) > 10

Elle est disponible en circuit intégré.

Elle peut être facilement intégrée et commandée numériquement si l'on remplace des résistances par des capacités commutées.

Inconvénient :

Cette structure nécessite 3 amplificateurs opérationnels

La phase des différentes sorties n'est pas identique.

Une autre configuration permettant également d'obtenir un filtre coupe-bande est proposée par la Figure 18. La sortie coupe-bande V_4 est construite en faisant la somme des sorties passe-bas V_3 et passe-haut V_1 .

$$H_{coupebande} = \frac{V_4}{V_e} = -\frac{R_b}{R_a} \times \frac{2R_4}{R_3 + R_4} \times \frac{1 - R_1 R_2 C_1 C_2 \omega^2}{1 + \frac{2R_3}{R_3 + R_4} jR_2 C_2 \omega - R_1 R_2 C_1 C_2 \omega^2}$$

Par identification, on obtient :

$$K_0 = -\frac{R_b}{R_a} \times \frac{2R_4}{R_3 + R_4} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad \text{et} \quad m = \frac{R_3}{R_3 + R_4} \sqrt{\frac{R_2 C_2}{R_1 C_1}}$$

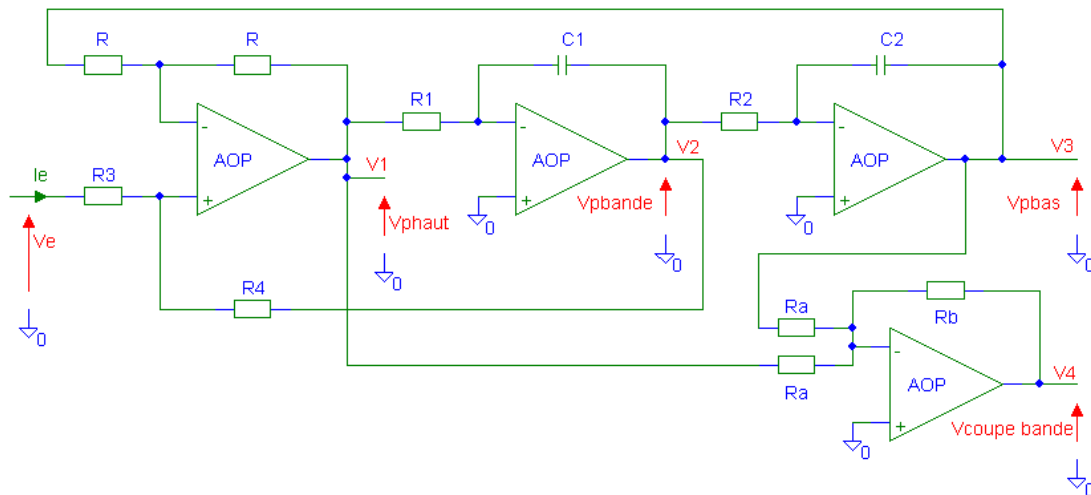


Figure 18 : Filtre à variable d'état (variante 2)

Dans ce cas, il est possible de mettre R_3 à la masse et l'entrée se fait sur l'entrée - de l'amplificateur opérationnel, par l'intermédiaire d'une résistance série. Ceci offre la possibilité de choisir la polarité des sorties vis à vis de l'entrée, ainsi que l'indépendance du facteur d'amortissement m vis à vis du gain.

Il existe de nombreuses autres variantes connues que l'on retrouve sous les noms de Biquad, Tow-Thomas, de KHN (Kerwin, Huelsman, Newcombe)...

Filtre Passe tout ou déphaseur

Ils peuvent servir dans les systèmes asservis ou dans les filtres pour améliorer la stabilité ou modifier la phase.

1^{er} ordre

La forme générale de la fonction de transfert est :

$$H = \frac{V_s}{V_e} = \frac{Z_1 Z_4 - Z_2 Z_3}{Z_1 Z_3 + Z_1 Z_4}$$

Cas 1 : $Z_1 = Z_2 = Z_3 = R$ $Z_4 = \frac{1}{jC_4 \omega}$

$$H = \frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

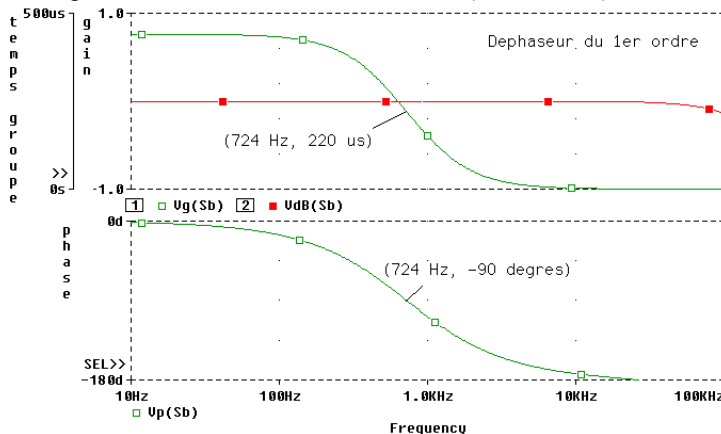
Module : $|H| = 1$ Quelle que soit la fréquence.

Argument : $\varphi = -2 \arctan(RC\omega)$

temps de propagation : $\tau_g = -\frac{d\varphi}{d\omega}$

$$\tau_g = +\frac{2RC}{1 + (RC\omega)^2} \text{ soit } \tau_{g0} = +2RC \text{ lorsque } \omega \rightarrow 0$$

Exemple obtenu avec $R=10k\Omega$ et $C=22nF$ ($F_0 \approx 724$ Hz)



L'atténuation constatée au-dessus de 100kHz est due à la bande passante de l'amplificateur utilisé, ici un LM324.

Cas 2 : $Z_1 = Z_2 = Z_4 = R$ $Z_3 = \frac{1}{jC_3 \omega}$

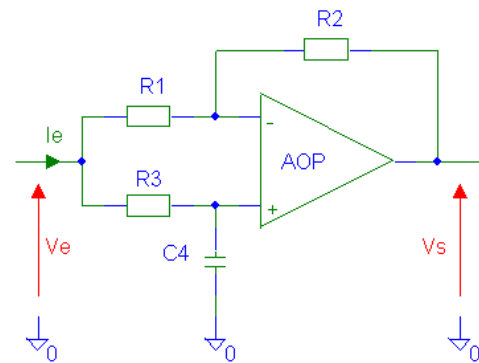
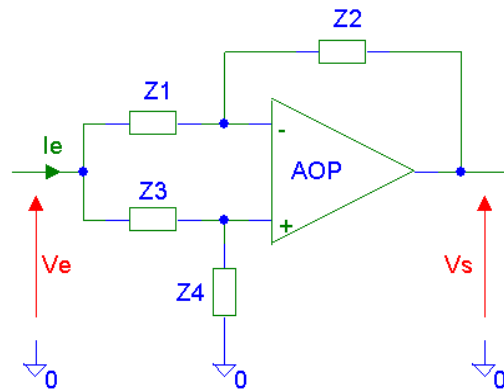
$$H = -\frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

Module : $|H| = 1$ Quelle que soit la fréquence.

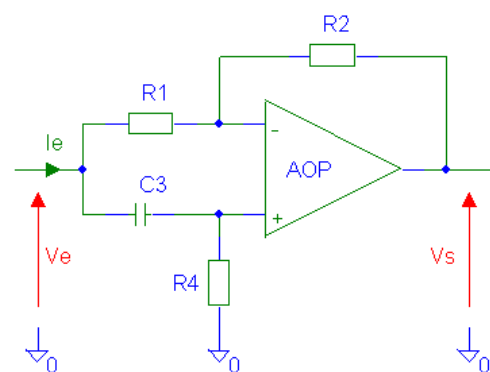
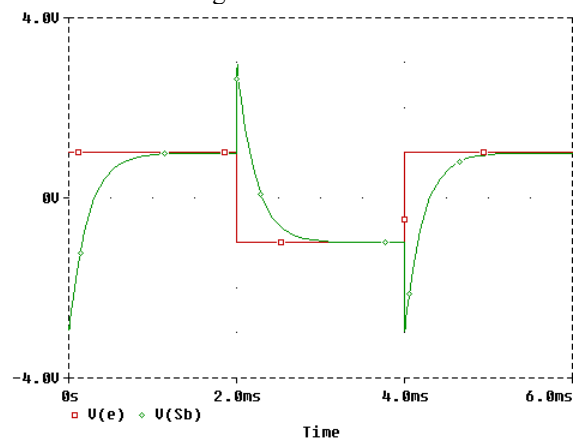
Argument : $\varphi = \pm\pi - 2 \arctan(RC\omega)$ (en radians).

Par rapport à la configuration précédente, il y a juste une inversion du signal de sortie : $\varphi_2 = \varphi_1 \pm \pi$

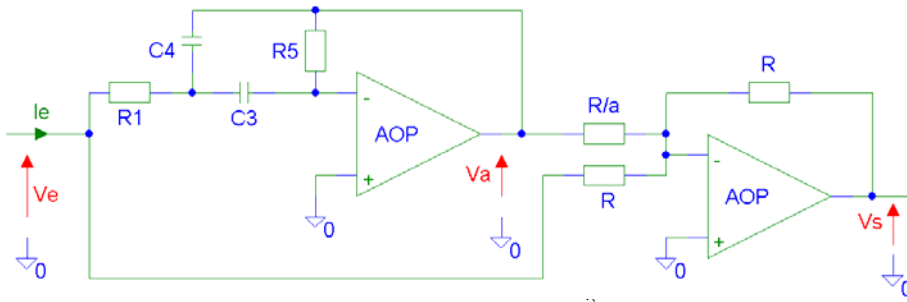
Autre application, en choisissant 3 résistances identiques pour Z_1 , Z_2 et Z_3 , et en remplaçant Z_4 par un interrupteur, cette structure devient un modulateur ou démodulateur. Le signal de sortie est égal à $V_s(t) = \alpha(t) \times V_e(t)$ avec $\alpha(t)$ la commande de l'interrupteur : $\alpha(t) = \pm 1$.



Réponse temporelle du filtre passe-tout, à un signal carré de 250 Hz



2^{ème} ordre


 Figure 19 : filtre passe-tout du 2^{ème} ordre

On reconnaît autour du premier amplificateur opérationnel une structure de Rauch configurée en filtre passe-bande (V_a). Le second amplificateur fait la somme pondérée du signal d'entrée avec celui issu du filtre passe-bande (V_a).

Calcul de la fonction de transfert :

équation de la sortie du 1^{er} amplificateur opérationnel

$$V_a = \frac{-jR_5 C_3 \omega}{1 + jR_1(C_3 + C_4)\omega - R_1 R_5 C_3 C_4 \omega^2} \times V_e$$

équation de la sortie du 2^{ème} amplificateur opérationnel

$$V_s = -V_e - a \times V_a = -(V_e + a \times V_a)$$

En remplaçant dans la deuxième équation V_a par l'expression de la première équation on obtient V_s en fonction de V_e :

$$\text{soit } H = \frac{V_s}{V_e} = -\frac{1 + j(2R_1 - a \times R_5)C\omega - R_1 R_5 C^2 \omega^2}{1 + 2jR_1 C\omega - R_1 R_5 C^2 \omega^2}$$

$$V_s = -V_e \left(1 + a \times \frac{-jR_5 C \omega}{1 + 2jR_1 C \omega - R_1 R_5 C^2 \omega^2} \right)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_5} \times C} \quad m = \sqrt{\frac{R_1}{R_5}}$$

Pour avoir un déphaseur, le module de $\frac{V_s}{V_e}$ doit être constant (indépendant de la fréquence).

$$\text{Module : } |H| = \left| \frac{V_s}{V_e} \right| = \sqrt{\frac{(1 - R_1 R_5 C^2 \omega^2)^2 + ((2R_1 - a \times R_5)C\omega)^2}{(1 - R_1 R_5 C^2 \omega^2)^2 + (2R_1 C\omega)^2}}$$

Pour remplir cette condition, il faut que $2R_1 = -(2R_1 - a \times R_5)$ soit $a = 4 \frac{R_1}{R_5} = 4m^2$ et $R_1 = m^2 \times R_5$

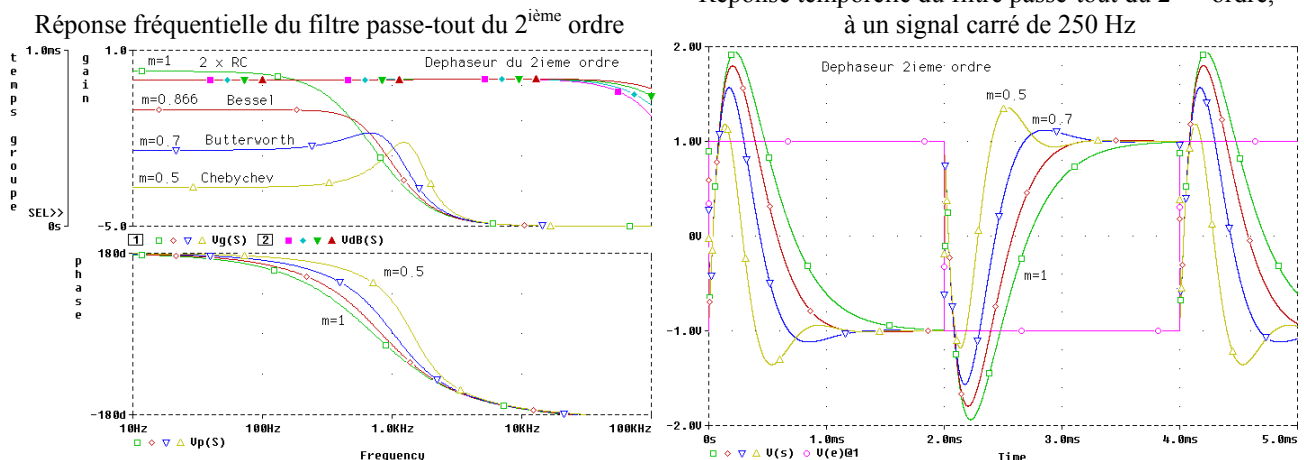
$$\text{Argument : } \varphi = \pm \pi - 2 \arctan \left(\frac{2R_1 C \omega}{1 - R_1 R_5 C^2 \omega^2} \right) \quad (\text{en radians}).$$

$$\text{Temps de propagation de groupe : } \tau_g = -\frac{d\varphi}{d\omega}$$

$$\tau_g = 2 \left(\frac{2R_1 C (1 + R_1 R_5 C^2 \omega^2)}{1 + 2R_1 C^2 \omega^2 (2R_1 - R_5) + (R_1 R_5 C^2 \omega^2)^2} \right) \quad \text{soit } \tau_{g0} = +4R_1 C \quad \text{lorsque } \omega \rightarrow 0$$

Exemple obtenu avec $R = R_5 = 10\text{k}\Omega$, $C_3 = C_4 = 22\text{nF}$, $R_1 = m^2 \times R_5$ et $a = 4m^2$

Réponse temporelle du filtre passe-tout du 2^{ème} ordre, à un signal carré de 250 Hz


 Figure 20 : réponse fréquentielle et temporelle pour différents coefficients d'amortissement m

L'atténuation constatée au-dessus de 100kHz est due à la bande passante de l'amplificateur utilisé, ici un LM324.

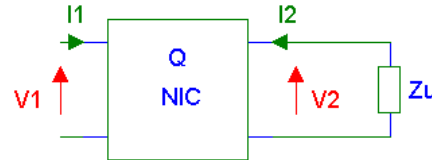
Autres fonctions actives

Ce chapitre propose des inverseurs d'impédances, et des amplificateurs non linéaires basés sur des structures à amplificateur opérationnel.

Inverseurs d'impédances (NIC)

L'inverseur d'impédance (Negative Impedance Converter) est un quadripôle qui permet de convertir une impédance Z_u en $-\alpha Z_u$.

$$Z_e = \frac{V_1}{I_1} = \alpha \times \frac{V_2}{I_2} = -\alpha \times Z_u$$



Deux cas peuvent être considérés :

- $V_1 = V_2$: donc $I_2 = \alpha I_1$, il s'agit d'un inverseur d'impédance en courant (INIC).
- $I_1 = -I_2$: donc $V_1 = -\alpha V_2$, il s'agit d'un inverseur d'impédance en tension (VNIC).

Inverseur d'impédance en courant 1 :

$$Z_e = -\frac{R_1}{R_2} Z_u \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{R_1}{R_2}$$

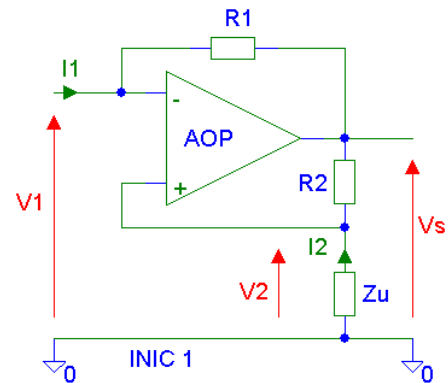
Conditions de fonctionnement :

Il faut s'assurer que suivant le choix de α , l'amplificateur reste bien dans son domaine linéaire ($V_1 = V_2$), donc que la tension de sortie V_s ne sature pas.

$$|V_s| = \left| \left(1 + \frac{R_2}{Z_u} \right) V_1 \right| < |V_{saturation}|$$

De plus, ce système présente une double rétroaction, l'une sur l'entrée – avec R_1 (contre-réaction) et l'autre sur l'entrée + avec R_2 . Il convient donc d'étudier les conditions de stabilité.

La réaction négative (contre-réaction) doit l'emporter devant la réaction positive, ce qui donne la relation suivante : $R_g > \alpha \times Z_u$ avec R_g la résistance de sortie du générateur, appliquée à l'entrée de l'inverseur d'impédance.



Inverseur d'impédance en tension 1 :

L'inverseur d'impédance en tension (VNIC) est obtenu en permutant R_1 et Z_u . Dans ce cas, l'impédance Z_u n'est plus reliée à la masse.

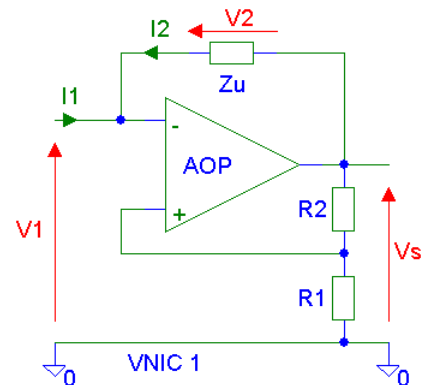
$$Z_e = -\frac{R_1}{R_2} Z_u \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{R_1}{R_2} \quad \text{ces expressions sont inchangées.}$$

Conditions de fonctionnement :

Non saturation :

$$|V_s| = \left| \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) V_1 \right| < |V_{saturation}| \quad \text{soit} \quad \left| \frac{1 + \alpha}{\alpha} V_1 \right| < |V_{saturation}|$$

Stabilité : $R_g > \alpha \times Z_u$



En permutant les entrées + et – de l'amplificateur opérationnel, la fonction reste inchangée (Inverseurs d'impédances) mais la condition de stabilité change. Ceci permet de choisir la configuration en fonction des valeurs de R_g et Z_u .

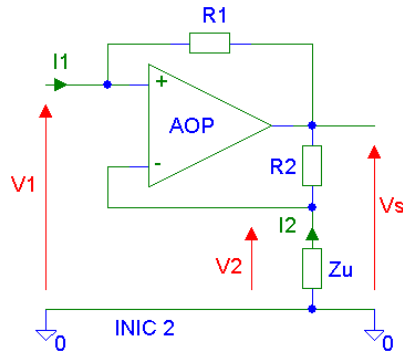
Inverseur d'impédance en courant 2**Conditions de fonctionnement :**

Non saturation :

$$\left| \left(1 + \frac{R_2}{Z_u} \right) V_1 \right| < |V_{sat}|$$

Stabilité :

$$R_g < \alpha \times Z_u$$

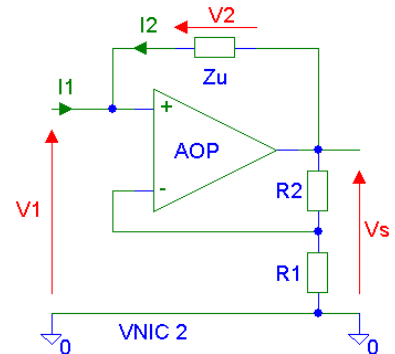
**Inverseur d'impédance en tension 2****Conditions de fonctionnement :**

Non saturation :

$$\left| \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) V_1 \right| < |V_{sat}|$$

Stabilité :

$$R_g < \alpha \times Z_u$$

**Amplificateurs non linéaires**

L'utilisation d'un composant présentant une fonction non linéaire comme une diode dans la boucle de contre réaction d'un système asservi, permet de créer des amplificateurs non linéaires.

La diode Rappel :

Le courant dans une diode est donné par la relation suivante :

$$I_d = I_s \left(e^{\frac{qV_d}{nkT}} - 1 \right)$$

I_s : courant de saturation. Il dépend fortement de la température.

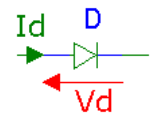
q : la charge de l'électron :

$$1.602 \times 10^{-19} \text{ coulomb}$$

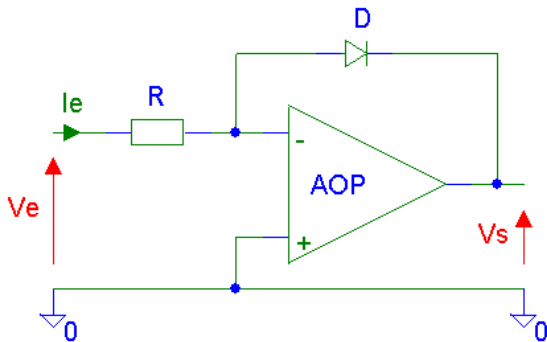
k : constante de Boltzman : $1.38 \times 10^{-23} \text{ J / K}$

T : température de la jonction en Kelvin.

n : facteur d'idéalité (1 à 2).

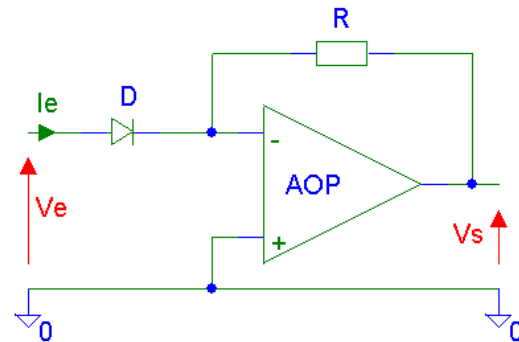


$$\frac{kT}{q} \approx 25.6 \text{ mV à } 25^\circ\text{C}$$

Amplificateur logarithmique

$$V_s = -\frac{kT}{q} \ln \left(\frac{V_e}{RI_s} \right)$$

$$e^{\frac{qV_d}{kT}} \gg 1$$

Amplificateur exponentiel

$$V_s = -RI_s e^{\frac{qV_d}{kT}}$$

Ces structures ne sont pas utilisables en l'état car elles sont très sensibles aux paramètres de la diode. n est variable d'une diode à l'autre, I_s double environ lorsque la température augmente de 10° , et dépend de chaque type de diode.

Amplificateur logarithmique compensé :

La diode est remplacée par une paire de transistors T_1 et T_2 .

$$V_{s2} = -\frac{kT}{q} \ln \frac{V_e R_0}{V_{ref} R} \quad \text{si le courant de sortie } I_{s2} = 0$$

On voit que la fonction de transfert dépend encore de la température, mais cette fois de façon connue et linéaire.

Précautions :

- $I_{s2} = 0$, il faut donc ajouter un étage de sortie à haute impédance d'entrée. Celui-ci pourra également donner du gain et compenser la dérive thermique.
- Les 2 transistors T_1 et T_2 doivent être intégrés sur la même puce de silicium afin qu'ils aient des caractéristiques semblables, et qu'ils soient à la même température.

